

DR. GAUSZ TAMÁS

SZÁRNYPROFIL, SZÁRNY
és
LÉGCSAVAR VIZSGÁLATA

szakmailag ellenőrizte

DR. GAUSZ ZSANNA

Repülőgépek és Hajók Tanszék

kiadványa

1995

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	2
2.	Szárnymetszet körüli áramlás	6
2.1	A szárnyprofilok körül kialakuló síkáramlás fizikai tulajdonságai	6
2.2	Komplex potenciál és konform leképezés	9
2.3	Az örvény-panel módszer	12
2.1	Melléklet: Az örvény-panel módszer (számítógép-program)	20
2.2	Melléklet: Örvény-panel módszer numerikus integrálással (számítógép-program)	26
2.4	Több profil együttes számítása	30
2.3	Melléklet: Két-profil program	32
3.	Véges szárnyakon kialakuló cirkuláció-megoszlás számítása	40
3.1	Örvény-fonalak sebesség indukciójának vizsgálata	40
3.2	Karcsú, egyenes szárnyak vizsgálata	42
3.1	Melléklet: Karcsú, egyenes szárny számítása	49
3.3	Általános szárny	53
3.2	Melléklet: Alkalmazott örvény elmélet (számítógép-program)	64
4.	A légcsavar	69
4.1	Légcsavar előzetes méretezése	70
4.2	Előzetes méretezés mérések alapján	72
4.3	Légcsavar méretezés	73
4.1	Melléklet: Légcsavar számítás (számítógép-program)	78

1. BEVEZETÉS

E jegyzet célja a repülőgépszárnyak valamint a légcsavarak körül kialakuló áramlás néhány kérdésének fizikai, matematikai vizsgálata és a felvetett kérdésekre számítási algoritmus kidolgozása. A jegyzetben közölt számítási eljárások általában ideális (összenyomhatatlan, homogén és sűrűdásmentes) közegre vonatkoznak. A fizikai jelenségek magyarázatánál azonban - ahol ez lényeges - figyelembe vesszük a levegő sűrűdését is. A jegyzetben tárgyalt kérdések vizsgálatakor feltételezzük az [1]-ben foglalt, ide vonatkozó áramlástan alapok ismeretét.

A tárgykörbe tartozó ismeretek szorosan kapcsolódnak egymáshoz. Előfordulhat tehát, hogy valamely kérdés szerepe illetve jelentősége a későbbiek fényében érthető meg igazán. Ezért ajánljuk, hogy az érdeklődő Olvasó ne elégedjen meg az anyag egyszeri átolvasásával.

Általában arra törekszünk, hogy a fizikai modell (részecske szemlélet) bemutatásán keresztül értelmezzük a valóságos jelenségeket, rámutatva ezzel az elhanyagolásokra illetve a fizikai-matematikai modell és a valóság közötti leglényegesebb eltérésekre. Ez azért nagyon fontos, mert a számításainkat ennek alapján értelmezhetjük és a fizikai korlátokat is így állapíthatjuk meg.

Itt, a bevezetőben foglalkozunk a legalapvetőbb kérdés néhány vonatkozásával: általában ideális kontinuummal, azaz a teret folytonosan kitöltő közeggel számolunk; ezzel szemben a levegő és a többi valóságos folyadék is részecskékből áll. Arra törekszünk, hogy a számunkra érdekes fizikai tulajdonságokat, jellemzőket a részecskékből, sebességéből és esetleges egyéb sajátosságaiból származtassuk. Ez vizsgálataink fizikai megalapozása és értelmezése miatt fontos.

Az aerodinamikai (aerodinamika=légerőtan) vizsgálatokban alapvető szerepet játszik a nyomás és a csúsztató feszültség. A következőkben ezen fizikai jellemzők részecske szemléleten alapuló magyarázatát fogalmazzuk meg.

Vizsgáljuk először a nyugvó levegőt. (Folyadék vagy közeg elnevezés helyett a következőkben gyakran a levegő elnevezést használjuk majd, mivel a kérdéseink első sorban a repüléshez kapcsolódnak.) A levegő-részecskék - a nyugvó levegőben is - rendezetlen hőmozgást végeznek. Ez, mint az elnevezése is mutatja, rendezetlen, azaz nincs kitüntetett iránya - vagyis minden irány egyformán valószínű. Ezért beszélünk - makroszkópikus méretek esetén - nyugalomról.

A részecskék mozgása azonban nem akadálytalan: mozgásuk közben akadályokba (másik részecske, szilárd test) ütköznek és onnan visszapattannak. Eközben mozgásmennyiségük megváltozik és emiatt az akadályra erőt gyakorolnak. A felületegységre eső, időegységre vonatkozó mozgásmennyiség-változásból származó, normális irányú erőt nevezzük statikus nyomásnak. (Ugyanezen erő érintő irányú összetevőjéből származik a csúsztató feszültség, ezt azonban részletesen később mutatjuk be.) A rendezetlenségből következik - mivel minden irány egyformán valószínű - hogy a statikus nyomás skalár mennyiség.

Az aerodinamikus repülés a Földet körülvevő levegőburokban történik, amelyet első közelítésben nyugalomban lévőnek tekintünk. Tudjuk, hogy a levegő nyomása a magasság csökkenésével növekszik. Ez a statikus nyomás, nagy méretek esetén meghatározott irányban változik. E változás oka jól ismert: a Föld nehézségi ereje. A kicsiben iránytól független statikus nyomás tehát bizonyos esetekben meghatározott irányokban változhat. Természetesen az aerodinamikai (hidrodinamikai) hatások is előidézik nyomás változást,

de ennek vizsgálata később, a dinamikai vizsgálatok keretében történik. Amúgy az atmoszférikus nyomás ilyen változása igen kedvező, hiszen enélkül már rég elfogyott volna az atmoszféra! A nyomás esetleges változását a nyomás gradiensevel vesszük figyelembe.

Ha a nyugvó légtérben egy szilárd test található, akkor az eredetileg rendezetlen mozgásnak lesz várható iránya és ez éppen a szilárd test vizsgált pontjának a felületi normálisa. Ez a magyarázata annak hogy a statikus nyomás a felületre merőlegesen hat.

A statikus nyomás tehát, az eddig elmondottak szerint arányos a rendezetlen hőmozgás sebességével és hasonlóképpen arányos az egységnyi térfogatban elhelyezkedő részecskék tömegével is. Ezt matematikailag az általános gáztörvény írja le:

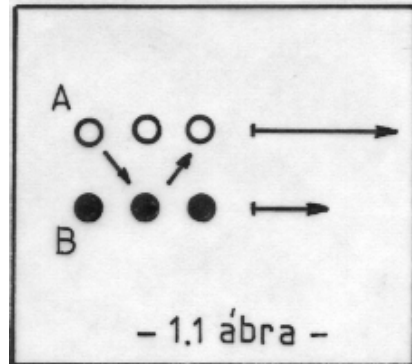
$$p = \rho R T ;$$

ahol a részecske-sebesség a hőmérsékletben, a részecskék egységnyi térfogatbeli tömege a sűrűségben jelenik meg. Az R gázállandó a különböző fizikai mennyiségek átváltószáma.

A levegőben - minden más folyadékhoz illetve gázhoz hasonlóan - csak nyomó-feszültséget értelmezhetünk, hiszen a legkisebb elképzelhető ütközés-szám a nulla. Ezek szerint húzófeszültség nem létezhet - egészen pontosan legfeljebb a kohézió (ez a részecskék közötti vonzóerő) miatti húzófeszültség létezhet, de kohéziót csak folyékony közegben értelmezünk, ahol a részecskék egymáshoz igen közel helyezkednek el. A gázokban - így a levegőben is - a részecskék átlagos távolsága a részecske-átmérőhöz viszonyítva igen nagy, ezért elegendő a mechanikai hatások vizsgálata.

A dinamikus nyomást a statikus nyomáshoz hasonlóan értelmezzük, a különbség csak az, hogy ez a nyomásfajta a rendezett mozgásból származik:

$$p_{din} = \frac{\rho}{2} V^2 ;$$



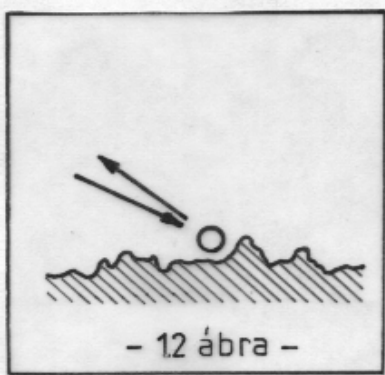
Valóságos (viszkózus) közeg esetén a normál-feszültség (nyomás) mellett csúsztató feszültség is ébred, amelyet szintén a részecske szemlélet alapján értelmezzük. A csúsztató feszültség keletkezésének a viszkozitás mellett szükséges feltétele a rendezett mozgásbeli sebesség különbség is.

Az 1.1 ábrán az "A" és a "B" közvetlenül egymás mellett haladó (áramló) részecske sorokat jelöl. Ha egy részecske pl. az "A" sorból a "B"-be lép át, akkor azt impulzus kifejtésével gyorsítja. Ha viszont a "B"-ből kerül az "A"-ba, akkor az "A" sort lassítja. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos rétegek - amelyek között sebesség különbség van egymás mozgását befolyásolják: a gyorsabb a lassúbat gyorsítani, a lassúbb a gyorsabbat lassítani igyekszik. Gázok illetve levegő esetében ezt nevezzük csúsztató feszültségnek. Réteges (lamináris)

áramlás esetén a részecske-csere a rendezetlen hőmozgás hatására; gomolygó (turbulens) áramlás esetén a turbulens sebességingadozások hatására jön létre.

Csak a teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a folyékony közegben, réteges áramlás esetén alapvetően a részecskék között fellépő kohéziós erő miatt keletkezik a csúsztató feszültség; a turbulens folyadék áramlásra és a gázok áramlására általában is igaz a részecske-csere elmélet.

A részecske-csere nem csak a csúsztató feszültség keletkezésére ad magyarázatot. Ezen az alapon látható be a konvektív energia-transzport is. Hasonlóképpen ez a fizikai magyarázata számos egyéb transzport jelenségnek (ilyen pl. a diffúzió).



A szilárd test felületén keletkező, nyomásból származó erőt már korábban megvizsgáltuk. Az érdes felszínű test felületén - valóságos közegben történő mozgás esetén - csúsztató feszültség is keletkezik. Ezt szintén a levegő molekulák mozgására vezetjük vissza. Az 1.2 ábrán látható módon érkező részecske a felületnek ütközik és onnan visszapattan. Eközben a mozgásmennyisége megváltozik, azaz a felületre (testre) erőt gyakorol. Ennek a felületi normális irányú összetevője a nyomás (p), érintő irányú összetevője a csúsztató feszültség (τ).

Az ábra szerint, ha a felület érdes, akkor a falhoz érkező részecskék nagyjából az érkezési irányba pattannak vissza. Ez pedig azt jelenti, hogy ezen részecskék sebességének az érintő irányú összetevőjéről kimondhatjuk: a várható értékük nulla. Nagyon fontos: nem a sebesség-összetevő, csak a várható érték nulla! A kontinuum-szemléletű vizsgálat során kimondjuk az ún. "tapadási feltétel"-t (azaz a "szélső réteg áll"), ennek fizikai magyarázata olvasható a fenti sorokban.

A szilárd test felületén kialakuló feszültségek (nyomás és csúsztató feszültség) magyarázzák a testen keletkező erőt. Az akció-reakció elve szerint azonban így a test is erőt gyakorol az őt körülvevő levegőre. Emiatt pedig megváltozik a levegő mozgásmennyisége. Ezt az áramlástan "impulzus tétel"-nek nevezett integrál-egyenlete segítségével írhatjuk le. A mozgásmennyiség változás pedig sebesség változást jelent - ezt nevezzük indukált sebességnek.

A légerő és az indukált sebesség tehát szorosan összetartozó fogalom, egymással ok-okozati összefüggésben álló jelenségek kapcsolatát jelenti, azaz kimondhatjuk, hogy ha létezik indukált sebesség, akkor van légerő és ha létezik légerő, akkor van indukált sebesség is. Az eredő légerő és az eredő indukált sebesség egymással párhuzamos. Külső megfigyelő számára az értelmük is azonos, az együttmozgó megfigyelő ellentétes értelműnek látja őket.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a testek körüláramlása után a levegőben nyomáskülönbségek maradnak fenn (pl. szárnyprofil, szárny, légcsavar). Ezek kiegyenlítődése

további sebességváltozáshoz vezet. A következőkben egy nagyon hasznos közelítést alkalmazunk:

a testtől távoli indukált sebesség kétszerese a testhez közeli indukált sebességnek.

Ez az úgynevezett "kétszeres indukált sebesség törvénye", amelyet - jóllehet csak közelítés - igen gyakran alkalmazunk majd. Példaként a 2. fejezet 2.2 és 2.3 ábrájára illetve a hozzá kapcsolódó magyarázatra vagy a 4. fejezet 4.2 ábrájára és a hozzá tartozó magyarázatra utalunk.

Az aerodinamikai vizsgálatokban megengedjük illetve figyelembe vesszük a levegőben történő mozgást. A mozgás kizárásával az aerostatika tudományához jutunk. A statikus felhajtó-erő - ami pl. a léghajók repülésének az alapja - mindig létezik; az aerodinamikai erő létezésének feltétele viszont a mozgás! Az aerodinamikai feladatokban a statikus felhajtóerőt - annak viszonylagos kicsinsége miatt - elhanyagoljuk.

2. SZÁRNYMETSZET KÖRÜLI ÁRAMLÁS

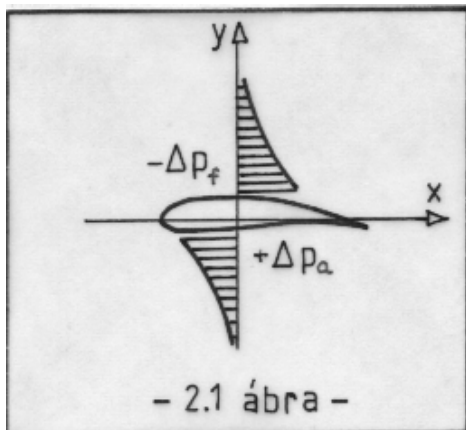
A repülőgépszárnyak jellegzetes síkmetszete a szárnyprofil. A repülés kezdetén sík vagy ívelt lapokat alkalmaztak. Innen indult az a fejlődés, aminek eredményeképpen napjainkra változatos követelményeknek eleget tévő, rendkívül sokféle, korszerű szárnyprofilt fejlesztettek ki.

Ebben a fejezetben összenyomhatatlan és általában sűrűdásmentes kontinuum feltételezésével számolunk. Alkalmoszerűen azonban, különösen a fizikai magyarázatok esetében, a sűrűdés hatásaira is kitérünk.

A vizsgálataink alapvetően a profil körül kialakuló nyomáseloszlás meghatározását célozzák, ez lehetőséget ad a felhajtóerő, az indukált ellenállás és a profil nyomatóki tényező számítására is. A továbbiakban mindig összenyomhatatlan közeget tételezünk fel.

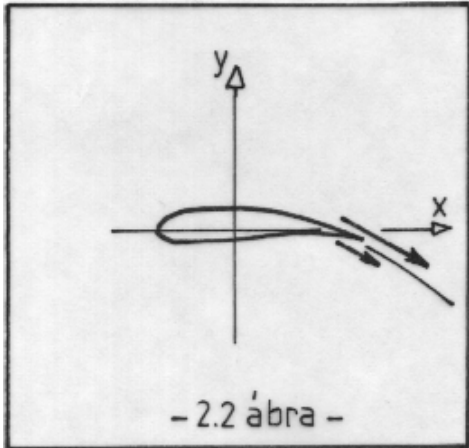
2.1 A szárnyprofilok körül kialakuló síkáramlás fizikai tulajdonságai

A következőkben először a szárnyprofil körül kialakuló áramlás fizikai sajátosságait vizsgáljuk meg. A szárnyprofil - lett légyen akár síklap akár tényleges profil - az őt körüláramló levegőt eltereli. A sebesség változás - ezt nevezzük indukált sebességnek - mozgásmennyiség változással jár. A mozgásmennyiség változás oka a levegőt elterelő profil illetve a profil levegőre gyakorolt erőhatása; ennek ellentettje (reakcióereje) a keresett erő - eredő légerő, az alapfeltételek miatt természetesen sűrűdés nélkül.



Kissé részletesebben vizsgálva ezt a kérdést, láthatjuk, hogy az elterelés az áramvonalak görbületével jár együtt. Az áramvonalak görbülése pedig (pl. az Euler egyenlet szerint) nyomás-változást jelent. Alulról a profil felé közeledve az atmoszfériusról (zavartalanról) induló nyomás a profil alsó felületéig nő. A görbület azonban a profil felett is hasonló irányú; így a nyomásnak errefelé is növekednie kell. Ez a növekedés egészen az atmoszférikus (zavartalan) nyomásig tart, ezért alacsony értékről kell indulnia. Így alakul ki a profil alatti túlnyomás és a profil feletti depresszió (2.1 ábra).

Az energia megmaradás (pl. Bernoulli egyenlet) értelmében pedig kimondhatjuk, hogy a nyomás növekedése sebesség csökkenéssel, a nyomás csökkenése viszont sebesség növekedéssel jár. (Ez a gondolatsor igen hasznos és esetleg segíthet a téves magyarázatok pl. "fent hosszabb az út" elkerülésében.) A nyomásból származó légerő - ezt a későbbiekben röviden **légerő**nek nevezzük majd) keletkezésének és a vele kapcsolatos változásoknak a mechanizmusa tehát:

Irányelterelés \Rightarrow nyomásváltozás \Rightarrow sebességváltozás


Vizsgáljuk meg a profil körüli áramlást kissé részletesebben. A kilépőnél az áramvonalak találkoznak és a nyomás is azonos lesz, de a sebességek nem: a felső áramvonalon érkező részecskék nagyobb sebességűek, mint a profil alatti áramvonalon érkezők. Ha a profil körüli áramlásban csak nyomás (nyomófeszültség) lenne, akkor ez a tény ellentmondana az energia egyenletnek. A magyarázathoz figyelembe kell venni, hogy csúsztató feszültség is keletkezik.

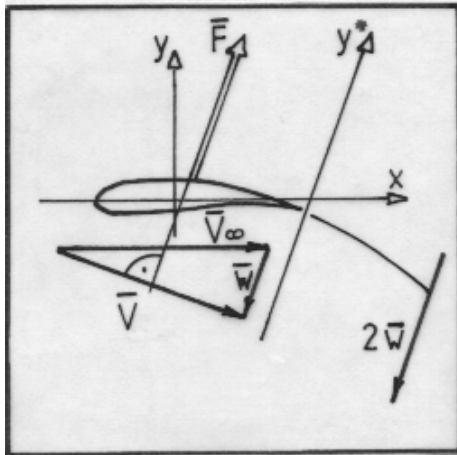
A profil a nyugvó levegőben mozogva azzal energiát közöl. Fent, ahol általában nagyobbak a sebességek, nagyobb az energiaátadást biztosító csúsztató feszültség is. Emiatt alakul ki, vagy marad vissza a profil áthaladása után a fent vázolt sebességkülönbség.

A profilról leúszó örvényes nyom (2.2 ábra) felső és alsó széle közötti sebességkülönbség fokozatosan kiegyenlítődik. A felső sebesség elemi csökkenése elemi nyomásnövekedést; az alsó elemi növekedése elemi nyomáscsökkenést eredményez. Ez pedig az örvényes nyom, vagy röviden kilépő áramvonal lefelé görbülését eredményezi. Így alakul ki a "második" indukált sebesség, vagy másképp fogalmazva: itt is látható, hogy a távoli indukált sebesség kétszerese a közelinek. A további áramvonal-görbülésből következik, hogy ez az áramkép az y^* tengelyre (2.3 ábra) nézve lesz szimmetrikus (legalább is első közelítésben). Ez pedig azt jelenti, hogy a repülési sebesség (\bar{V}_∞) és a közeli indukált sebesség (\bar{v}) összegeként áll elő az a \bar{V} sebesség, amire a légerő (\bar{F}) merőleges. Ezt az erőt a megszokott módon felbonthatjuk \bar{V}_∞ -re merőleges összetevőre - gyakran ezt nevezik felhajtóerőnek - és \bar{V}_∞ -nel párhuzamos összetevőre - ezt nevezük indukált ellenállásnak. Alaki ellenállás ideális közegben nem keletkezik.

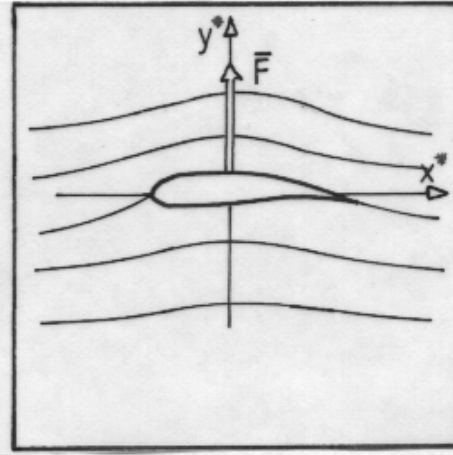
Itt is hangsúlyozzuk, hogy több esetben (pl. légcsavar számítás) az indukált sebességet is figyelembe vesszük, ilyenkor nincs szükség az indukált ellenállásnak nevezett segédfogalomra, a profil-mérésekből származó erő-tényezők közvetlenül felhasználhatók.

A 2.3 ábrán látható, valóságos áramképet közelíti a 2.4 ábrán látható, a komplex potenciálok elméletéből ismert áramkép. Ilyen áramképet kaphatunk pl. a Zsukovszkij féle leképezéssel. Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy ez (2.4 ábra) a közelítő áramkép, ennek kell hasonlítani a valóságos áramképre (2.3 ábra). A hasonlóság pedig - első közelítésben - akkor áll fenn, ha ezt a profilt illetve a körülötte kialakuló áramlást az (x^*, y^*) koordináta rendszerben vizsgáljuk. A számításunk eredményeképpen kapott légerő (ami

gyakorlatilag a felhajtóerővel azonos) a \bar{V} sebességre lesz merőleges - ezért kell a 2.3 ábrának megfelelő helyzetben az indukált és esetleg alaki ellenállást is értelmezni.



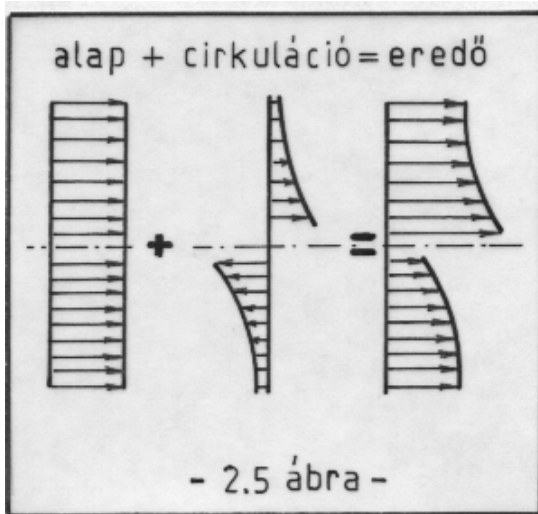
- 2.3 ábra -



- 2.4 ábra -

Az alaki ellenállás keletkezésének szükséges feltétele a súrlódás, mivel ez okozza a profil mentén kialakuló általános nyomás-csökkenést, aminek eredményeképpen a profil körüli nyomáskülönbségből (ami a gyakorlatban mindig nyomás csökkenés) adódó, mozgásiránnyal ellentétes erő - ez az alaki ellenállás - áll elő. Ideális közegben - gondoljunk pl. a henger körüli nyomás-eloszlásra - mivel a nyomás-eloszlás az "y" tengelyre mindig szimmetrikus, alaki ellenállás nem keletkezik.

A számítást a cirkuláció meghatározására építjük. A cirkuláció olyan segédfogalom, amit éppen a számítások elvégezhetőségének érdekében vezetünk be. Ezt a 2.5 ábra alapján mutatjuk be. A profil körüli sebesség-eloszlást úgy kaphatjuk meg, ha a zavartalan alapáramlásra egy cirkuláció sebesség-eloszlását superponáljuk.



- 2.5 ábra -

Az eredő sebesség-eloszlás az ábra jobb oldalán látható, vizsgálatát csak nagy vonalakban végezzük: eltekintünk ui. az örvény (cirkuláció) középpontjánál kialakuló igen nagy sebességektől. A későbbiekben megoszló cirkulációval dolgozunk majd, ahol véges határ-értéket kapunk, így ez a probléma áthidalható.

A következő vizsgálatok egyik legfontosabb kérdése éppen annak a cirkuláció-megoszlásnak a meghatározása, amivel a profil körüli áramlást leírhatjuk.

2.2 Komplex potenciál és konform leképezés

A komplex potenciál és konform leképezés a jelen munka feladatai megoldásának klasszikus eszköze. Megismerésük ezért fontos, no meg azért, mert szemléletes képet adnak a potenciálos örvény (cirkuláció) és a dipólus szerepéről.

Az ideális közeg (levegő) profil körüli áramlását leírhatjuk a komplex függvénytan segítségével. Bevezetésképpen vizsgáljuk a legegyszerűbb, Zsukovszkij féle profil körül kialakuló áramlást. A tárgyalást az [1]-ben közöltek szerint folytatjuk. Ezek szerint a

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z); \quad (2.1)$$

komplex változós, komplex értékű függvény - amennyiben folytonos és differenciálható, azaz reguláris - akkor egyben komplex potenciál is, amelyben:

$\varphi(z)$ - valósértékű, komplex változós függvény a sebességi potenciál és

$\psi(z)$ - valósértékű, komplex változós függvény az áramfüggvény.

Tekintsük a következő komplex potenciált:

$$w = V_{\infty} z + \frac{M}{2\pi z}; \quad (2.2)$$

Helyettesítsük be a $z = r e^{i\nu}$ alakot, ezzel néhány egyszerű átalakítás után kapjuk, hogy:

$$w = \left(V_{\infty} r \cos \nu + \frac{M}{2\pi r} \cos \nu \right) + i \left(V_{\infty} r \sin \nu - \frac{M}{2\pi r} \sin \nu \right);$$

$$\text{azaz a sebességi potenciál: } \varphi(z) = \left(V_{\infty} r \cos \nu + \frac{M}{2\pi r} \cos \nu \right);$$

$$\text{és az áramfüggvény: } \psi(z) = \left(V_{\infty} r \sin \nu - \frac{M}{2\pi r} \sin \nu \right).$$

Ha $V_{\infty} r_0 - \frac{M}{2\pi r_0} = 0$, azaz $r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi V_{\infty}}}$, akkor a ψ áramfüggvény a ν -tól függetlenül

állandó, ez tehát egy origó középpontú, r_0 sugarú kör körüli áramlás komplex potenciálja.

A (2.2)-ben az első tag egy párhuzamos áramlás, a második egy dipólus komplex potenciálja. A valós tengelyre érvényes szimmetriából következik, hogy a be- illetve kilépő torlópont a kör és a valós tengely metszéspontja (T_1 és T_2 , 2.6 ábra).

Ha a kör középpontja nem az origó, hanem a komplex számsík egy z_0 pontja, akkor (2.2) a következőképpen alakul:

$$w = V_{\infty} z + \frac{M}{2\pi(z-z_0)} ; \quad (2.3)$$

Belátható, hogy ezzel az eltolással a torlópontok helye a körön nem változik (2.7 ábra).

Vizsgáljuk a $\zeta = f(z)$ komplex változós, komplex értékű függvényt. Ez a függvény a "z" sík egy tartományát (T_z) leképezi a " ζ " sík egy tartományára (T_{ζ}).

A leképezést, ha az kicsiben szög és aránytartó, konformnak nevezzük. Pontos definíció szerint a leképezés akkor és csak akkor konform, ha a $\zeta = f(z)$ függvény a T_z tartomány minden pontjában reguláris, azaz egyértékű és differenciálható. Esetenként a tartomány határát vagy annak néhány pontját nem tekintjük a leképezés részének - ezek lesznek a leképezés szinguláris pontjai.

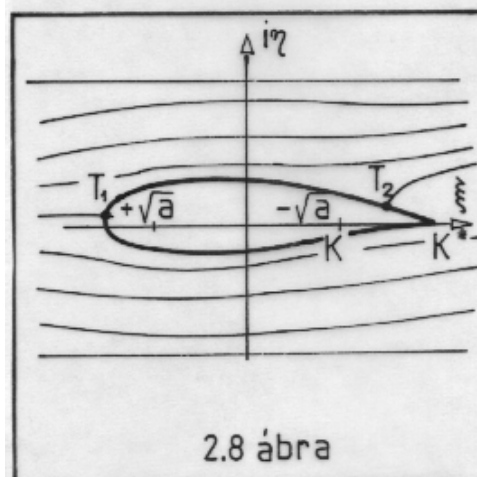
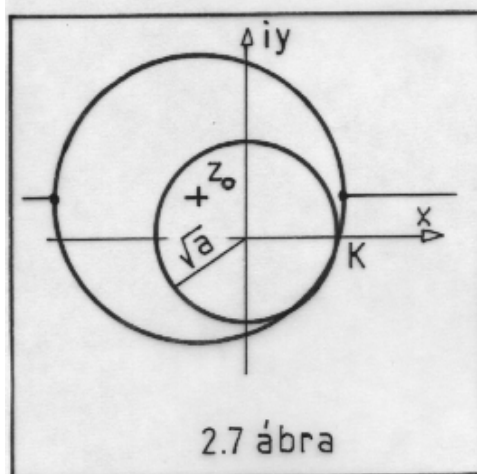
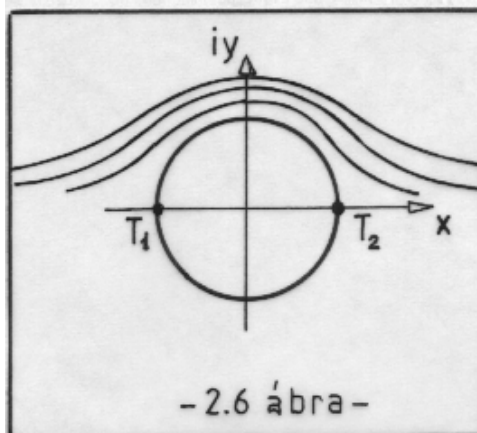
A kör körüli áramlást konform leképezéssel egy másik síkra vihetjük át. Alkalmazzuk a Zsukovszkij tarnszformációt, ami a:

$$\zeta = a z + \frac{a}{z} ;$$

függvénnyel írható le ("a" valós szám). Két szinguláris pontot találunk:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 0 = 1 - \frac{a}{z^2}, \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}.$$

A Zsukovszkij féle leképezéssel tehát a 2.7 ábrán látható, z_0 középpontú kört képeztük le a 2.8 ábrán látható profillá. A "K*" pont (profil kilépőéle) a 2.7 ábrán látható, "z" síkon $(-\sqrt{a})$ távolságra van az origótól. Ez lesz a leképezendő körön a "K" pont, a profil kilépőéle, mivel ez a leképezés szinguláris pontja (ahol a sima körvonal pont töréspontba megy át, azaz megszűnik a szögtartás). A másik szinguláris pont a leképezendő kör belsejében van, ez az elrendezés eredményez egy ívelt profilt a " ζ " síkon.



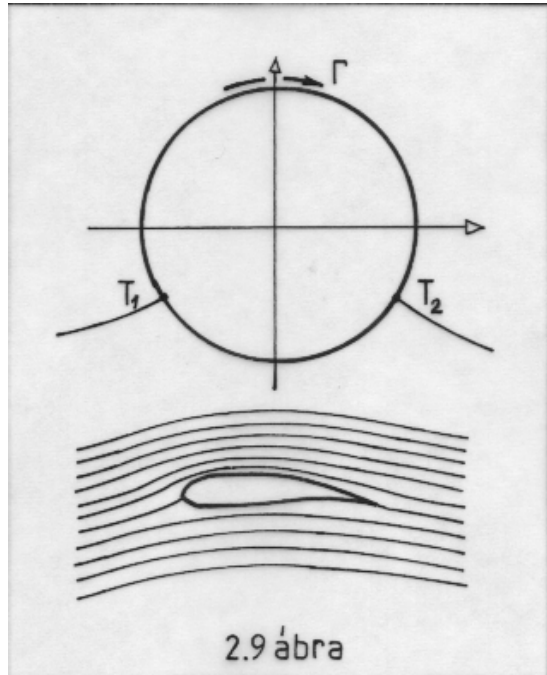
Az ekkor kialakuló torlópontokat a 2.8 ábrán láthatjuk. Ez az áramlási forma csak matematikailag lehetséges, fizikailag nem, mivel a kilépőél megkerülése végtelen nagy gyorsulással járna. Ezt a tényt mutatja egyébként a 2.2, 2.3 és 2.4 ábrán látható áramlás is. A kilépő torlópont (T_2) pontosan a kilépőélen (K pont) kell legyen - ez a sima leáramlás feltétele.

Ehhez a 2.7 ábrán látható áramlást módosítani kell: olyan cirkulációt ($\Gamma = \oint \bar{V} d\bar{s}$) kell a kör köré elhelyezni, amely a T_2 torlópontot a K-ba viszi. Ekkor a komplex potenciál:

$$w = V_{\infty} z + \frac{M}{2\pi(z-z_0)} + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z-z_0) ; \quad (2.4)$$

Az alkalmasan választott cirkuláció hatására az eredő áramkép már megfelel a fizikai feltételeknek is (2.9 ábra).

A kiinduló képen ("z" sík) rögtön látható a szimmetria, ebből pedig következik, hogy a felhajtóerő merőleges a zavartalan áramlás sebességére. Mivel pedig ez a valós tengellyel párhuzamos, a felhajtóerő a képzetes tengely irányába mutat.



A végtelen fesztávolságú szárny egységnyi hosszú darabján keletkező felhajtóerő a **Kutta - Zsukovszkij** tétel szerint számítható ki:

$$F' = \rho V_{\infty} \Gamma ; \text{ azaz } c_f = \frac{2\Gamma}{V_{\infty} h} . \quad (2.5)$$

Itt c_f a profil felhajtóerő-tényezője és h a profil húr hossza. Ezt az összefüggést a későbbiekben többször alkalmazzuk majd, ez a képlet adja meg a kapcsolatot a cirkuláció és a felhajtóerő között.

A második fejezet lezárásaképpen néhány szót kell szólnunk a felhajtóerő kialakulásáról. A profil körüli áramlás megindulásakor (amíg a sebesség nagyon kicsi) az áramkép hasonlít a 2.9 ábrán vázoltéhoz. (Nem azonos vele, hiszen ez fizikailag lehetetlen, de nem áll távol tőle).

A sebesség növekedésével a kilépő torlópont elindul a kilépő felé, mivel a kilépő megkerülése egyre kevésbé lehetséges. Eközben azok a részecskék, amelyek a profil kilépő felé már megkerülték, folytatják a megkezdett forgó mozgást. De a gyorsuló áramlás ezt a forgatagot - amit egyébként indulási örvénynek nevezünk - elsodorja. Az indulási örvény intenzitása ideális folyadékban állandó, és a profiltól \bar{V}_{∞} sebességgel távolodik. Hatásától egy idő múltán eltekinthetünk. A gyakorlatban csak időben változó (instacionárius) feladatok megoldásakor számolunk vele.

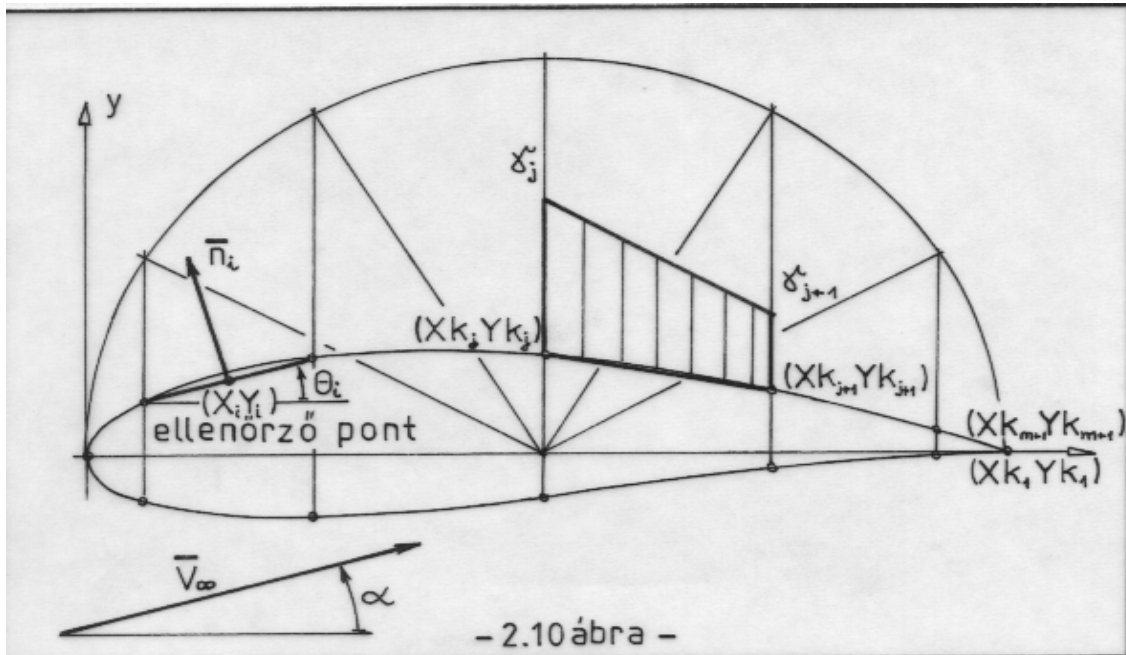
Valóságos levegőben ez az örvény a sűrűdés hatására megszűnik (hővé alakul). Az az idő, ami alatt megszűnik, több tényezőtől függ - nagyon nagyvonalúan perc nagyságrenddel becsülhetjük. Ez fontos tényező pl. a repülőtereken, az egymást követő startok közötti, minimálisan szükséges várakozási idő meghatározásában. Az örvények megszűnésére kissé konkrétan a 3. fejezetben, a **Lamb** féle örvény-modell ismertetése kapcsán térünk ki.

2.3 Az örvény-panel módszer

A profilok aerodinamikai vizsgálata során számos profilszámítási eljárás alakult ki. E módszerek lényegében két fő feladat megoldását célozzák:

- adott profil körül kialakuló áramlás számítása
- adott nyomáseloszlást előállító profil kontúrjának meghatározása.

Az itt ismertetendő örvény-panel módszer az első főfeladat megoldására szolgál, szisztematikus kereséssel azonban a második főfeladat is megoldható vele.



A profilt a 2.10 ábrán látható módon töröttvonalal helyettesítjük, úgy, hogy a töréspontok a kontúron legyenek. A töröttvonal szakaszok mentén lineárisan változó, megoszló cirkulációt veszünk fel (a ξ változó a lokális koordináta, amely 0-tól S_j -ig -ez a teljes szakaszhossz - fut):

$$\gamma(\xi_j) = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j) \frac{\xi_j}{S_j} ; \quad (2.6)$$

A későbbiekben, amikor ez majd szükséges lesz, az eredő cirkulációt a megoszló cirkuláció profilkontúr menti integrálásával határozzuk meg.

A számításban kontúrponatok (Xk_i, Yk_i) és ellenőrző pontok (X_i, Y_i) szerepelnek - ez utóbbiak (a definíció szerint) a kontúrponatokat összekötő szakaszok felezőpontjai. A számítást a sebességi potenciál felírásával kezdjük. Az alapáramlás sebességi potenciálja, ha a profil állásszöge α :

$$\varphi_a = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) ; \quad (2.7)$$

Ebben a számításban az állásszög (α) értéke fontos, hiszen ez alapparaméter. Az előző pontban már meghatároztuk egy, z_0 középpontú, Γ intenzitású örvény komplex potenciálját .

Az ebből számítható sebességi potenciált a $z = r e^{i \vartheta}$ helyettesítés felhasználásával fejezzük ki:

$$\varphi_\delta = \frac{\Gamma}{2 \pi} (-\vartheta) , \quad \text{ahol: } \vartheta = \text{Arctan} \frac{y - y_j}{x - x_j} ; \quad (2.8)$$

A fenti kifejezésből meghatározhatjuk a "j"-edik vonalon elhelyezkedő megoszló örvény sebességi potenciálját az (x,y) sík egy pontjában :

$$\varphi_\delta = - \int_0^{s_j} \frac{\gamma(\xi_j)}{2 \pi} \text{Arctan} \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) d\xi_j ; \quad (2.9)$$

Az eredő potenciált rögtön az (X_i, Y_i) ellenőrző pontban számítjuk. A profilkontúr mentén "m" számú szakaszt vettünk fel, ezek rész-potenciáljait összegezve és hozzáadva az alapáramlás potenciáljához (2.7 és 2.9 felhasználásával):

$$\varphi(X_i, Y_i) = - \sum_{j=1}^m \int_0^{s_j} \frac{\gamma(\xi_j)}{2 \pi} \text{Arctan} \left(\frac{Y_i - y_j}{X_i - x_j} \right) d\xi_j + V_\infty (X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha) \quad (2.10)$$

ahol:

$$x_j = Xk_j + \xi_j \cos \Theta_j ; \quad \text{és} \quad y_j = Yk_j + \xi_j \sin \Theta_j .$$

A 2.10 ábráról látható, hogy "m+1" darab γ értéket kell meghatározni. Ehhez először az ellenőrző pontokat használjuk fel. Azt mondjuk, hogy a sebességi potenciál ekvipotenciális vonalai itt a profilra merőlegesek, azaz a profil kontúrjára merőleges sebesség-összetevő nulla. Ebből következik, hogy a potenciál normális menti deriváltja az ellenőrző pontban nulla:

$$\frac{\partial \varphi(X_i, Y_i)}{\partial \bar{n}_i} = 0 ; \quad i=1,2,3, \dots, m. \quad (2.11)$$

A fenti deriváltakból "m" számú egyenlet adódik, még egy egyenletet kell keresnünk. Ezt a síma leáramlás feltételéből kapjuk:

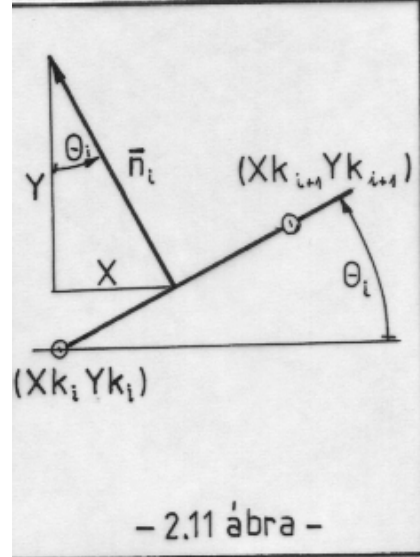
$$\gamma_1 + \gamma_{m+1} = 0 ; \quad (2.12)$$

A megoszló örvények potenciáljának normális menti deriváltját a következő módon számíthatjuk ki: először a külső függvényt (Arctan) deriváljuk, majd kiszámítjuk a belső változók normális menti deriváltjait. A második lépést a 2.11 ábra alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \bar{n}_i} \left(\Rightarrow \frac{X_i}{\bar{n}_i} \right) = - \sin \Theta_i$$

és

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \bar{n}_i} \left(\Rightarrow \frac{Y_i}{\bar{n}_i} \right) = \cos \Theta_i$$



Az "Arctan" függvény deriváltja a következő lesz:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_i} \left[\text{Arctan} \left(\frac{Y_i - y_j}{X_i - x_j} \right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_i - y_j}{X_i - x_j} \right)^2} \left[\frac{1}{X_i - x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial \bar{n}_i} - \frac{Y_i - y_j}{(X_i - x_j)^2} \frac{\partial X_i}{\partial \bar{n}_i} \right]$$

Ezzel egy szakasz (a j-edik) megoszló cirkulációjának normális menti deriváltja a következő módon írható fel:

$$\frac{\partial \varphi_0(X_i, Y_i)}{\partial \bar{n}_i} = - \int_0^{S_j} \frac{\gamma(\xi_j)}{2\pi} \frac{(X_i - x_j) \cos \Theta_i + (Y_i - y_j) \sin \Theta_i}{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2} d\xi_j ; \quad (2.13)$$

A (2.13)-ban megadott integrálok, a fenti feltételek mellett zárt alakban kiszámíthatók. Ez valamely integrálási kézikönyv (pl. [6]) birtokában lehetséges. Itt hosszadalmassága miatt és mert végeredményben más utat ajánlunk, nem részletezzük ezt a számítást, csak a végeredményt adjuk meg.

Miután a $\gamma(\xi_j)$ (2.6)-tal adott kifejezésében kétféle γ érték (γ_j illetve γ_{j+1}) fordul elő, a (2.13)-ban adott integrált két részletben célszerű kiszámítani:

$$c_{n2,ij} = - \int_0^{S_j} \frac{\xi_j}{S_j} \frac{(X_i - x_j) \cos \Theta_i + (Y_i - y_j) \sin \Theta_i}{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2} d\xi_j ; \quad (2.14/a)$$

és

$$c_{n1,ij} = - \int_0^{S_j} \left(1 - \frac{\xi_j}{S_j} \right) \frac{(X_i - x_j) \cos \Theta_i + (Y_i - y_j) \sin \Theta_i}{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2} d\xi_j ; \quad (2.14/b)$$

A számításban a cirkuláció értékek (γ_j) meghatározása a cél. Látható, hogy a $c_{n1,ij}$ a γ_j a $c_{n2,ij}$ pedig a γ_{j+1} együtthatója lesz. Az is látható, hogy először a (2.14/a)-t célszerű kiszámítani, ez ui. felhasználható a (2.14/b) meghatározásában. Az integrálás elvégzése után kapjuk:

$$c_{n2,ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ D + Q F / (2 S_j) - (A C + D E) G / S_j & \text{ha } i \neq j \end{cases} ; \quad (2.15/a)$$

és

$$c_{n1,ij} = \begin{cases} -1 & \text{ha } i = j \\ D F / 2 - C G - c_{n2,ij} & \text{ha } i \neq j \end{cases} ; \quad (2.15/b)$$

A (2.15/a) és a (2.15/b) képletben szereplő elnevezések magyarázata a következő:

$$A = - (X_i - Xk_j) \cos \Theta_j - (Y_i - Yk_j) \sin \Theta_j ;$$

$$B = (X_i - Xk_j)^2 + (Y_i - Yk_j)^2 ;$$

$$C = \sin (\Theta_i - \Theta_j) ;$$

$$D = \cos (\Theta_i - \Theta_j) ;$$

$$E = (X_i - Xk_j) \sin \Theta_j - (Y_i - Yk_j) \cos \Theta_j ;$$

$$F = \ln \left(1 + \frac{S_j^2 + 2 A S_j}{B} \right) ;$$

$$G = \text{Arctan} \left(\frac{E S_j}{B + A S_j} \right) ;$$

$$P = (X_i - Xk_j) \sin (\Theta_i - 2 \Theta_j) + (Y_i - Yk_j) \cos (\Theta_i - 2 \Theta_j) ;$$

$$Q = (X_i - Xk_j) \cos (\Theta_i - 2 \Theta_j) - (Y_i - Yk_j) \sin (\Theta_i - 2 \Theta_j) .$$

Az 1 és -1 érték a (2.14/a) és a (2.14/b) integrálok eredménye, abban az esetben, amikor a potenciál deriváltját (az örvény-réteg indukált sebességét) olyan pontra számítjuk ki, amely rajta van az örvény-rétegen. Ekkor az integrálok magfüggvénye szinguláris lesz és

meghatározásuk az un. Cauchy féle főérték alkalmazásával lehetséges. (Ez részletesen pl. [1]-ben olvasható).

Az eljárás alapján készült program - amelyet a 2.1 mellékletben ismertetünk - futtatása során kiderült, hogy a "G" együttható értékének kiszámítása bizonyos esetekben pontatlan. Hasonlóképpen pontatlan lehet a Θ szögek meghatározása. Ezért a későbbiekben a (2.14/a) és a (2.14/b) integrálokat (a szinguláris esettől eltekintve) numerikusan számíttjuk ki. Ez egy új programot eredményez, amelyet a 2.2 mellékletben ismertetünk.

A továbbiakban dimenziótlán cirkulációval számolunk:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{2\pi V_\infty} ; \quad (2.16)$$

A profilkontúrra merőleges sebesség-komponens nulla voltából származó feltételből (2.11 kifejezés) "m" egyenletet írhatunk fel:

$$\sum_{j=1}^m (c_{n1,ij} \gamma'_j + c_{n2,ij} \gamma'_{j+1}) = \sin(\Theta_i - \alpha) ; \quad (2.17)$$

Az "m+1"-edik egyenlet pedig a (2.12), a síma leáramlás feltétele. Ez egyébként azt jelenti, hogy a feladat matematikailag többértékű és kell egy fizikai feltétel, amely mintegy kiválasztja a sok matematikailag lehetséges közül a fizikailag is megfelelő megoldást.

Végeredményben a γ'_j számítására inhomogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer kapunk:

$$\overline{\mathbf{A}}_n \overline{\boldsymbol{\gamma}}' = \overline{\mathbf{b}} ; \quad (2.18)$$

ahol az együttható-mátrix elemei:

$$a_{nij} = \begin{cases} c_{n1,i1} & \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ (} j = 1 \text{)} \\ c_{n1,ij} + c_{n2,i,j-1} & \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ és } j = 2, 3, \dots, m \\ c_{n2,im} & \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ és } j = m + 1 \\ 1 & \text{ha } i = m + 1 \text{ és } j = 1 \text{ vagy } j = m + 1 \\ 0 & \text{ha } i = m + 1 \text{ és } j = 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

Az $\overline{\mathbf{A}}_n$ mátrix elemeit a 2.4 pontban táblázatosan is megadtuk, ott ez a táblázat 1. és 2. sora illetve az 1., 2. és 3. oszlop (azaz a bal felső al mátrix)

$$\text{az ismeretlenek vektora: } \overline{\boldsymbol{\gamma}}' = \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_{m+1} \end{bmatrix} ;$$

végül pedig a jobboldal elemei: $b_i = \begin{cases} \sin(\Theta_i - \alpha) & \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{ha } i = m + 1 \end{cases}$

Az egyenletrendszer megoldása után a profil körüli sebességeloszlás - pontosabban a sebesség az ellenőrző pontokban - a sebességi potenciál érintő menti deriváltjának felhasználásával számítható ki, azaz keressük a

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi(X_i, Y_i)}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} \text{ deriváltat.}$$

A számítás részleteit illetően csak nagyvonalú ismertetésre szorítkozunk. Az érintő menti derivált, a 2.11 ábra alapján:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} \left(\cong \frac{X_i}{\bar{\mathbf{t}}_i} \right) = \cos \Theta_i \quad \text{és} \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} \left(\cong \frac{Y_i}{\bar{\mathbf{t}}_i} \right) = \sin \Theta_i$$

Az örvény-réteg potenciál érintő menti deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} \left[\text{Arctan} \left(\frac{Y_i - y_j}{X_i - x_j} \right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_i - y_j}{X_i - x_j} \right)^2} \left[\frac{1}{X_i - x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} - \frac{Y_i - y_j}{(X_i - x_j)^2} \frac{\partial X_i}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} \right]$$

ezzel:

$$c_{t2,ij} = - \int_0^{S_j} \frac{\xi_j}{S_j} \frac{(X_i - x_j) \sin \Theta_i - (Y_i - y_j) \cos \Theta_i}{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2} d\xi_j ;$$

és

$$c_{t1,ij} = - \int_0^{S_j} \left(1 - \frac{\xi_j}{S_j} \right) \frac{(X_i - x_j) \sin \Theta_i - (Y_i - y_j) \cos \Theta_i}{(X_i - x_j)^2 + (Y_i - y_j)^2} d\xi_j ;$$

ahonnan már a (2.19)-ben adott, tangenciális együttható mátrix elemei kiszámíthatók.

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi(X_i, Y_i)}{\partial \bar{\mathbf{t}}_i} = \cos(\Theta_i - \alpha) - \sum_{j=1}^{m+1} a_{tij} \gamma'_j ; \quad (2.19)$$

ahol:

$$a_{t\ i1} = c_{t1,ij} \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ és } j = 1$$

$$a_{t\ ij} = c_{t1,ij} + c_{t2,ij} \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ és } j = 2, 3, \dots, m$$

$$a_{t\ i, m+1} = c_{t2,im} \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, m \text{ és } j = m$$

itt:

$$c_{t2,ij} = \begin{cases} \pi / 2 & \text{ha } i = j \\ C + P F / (2 S_j) + (A D - C E) G / S_j & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

és:

$$c_{t1,ij} = \begin{cases} \pi / 2 & \text{ha } i = j \\ C F / 2 - D G - c_{t2,ij} & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

A kiszámított sebesség előjele nagyon fontos: pozitív ott, ahol az irányítása az ívelem irányításával azonos és negatív, ahol ellentétes. A sebesség ismeretében meghatározható a nyomás-tényező. A profil előtti pontból a profil feletti vagy profil alatti pontra felírt Bernoulli egyenlet:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2};$$

innen átrendezéssel következnek:

$$p - p_\infty = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \right] \quad \text{azaz} \quad c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2; \quad (2.20)$$

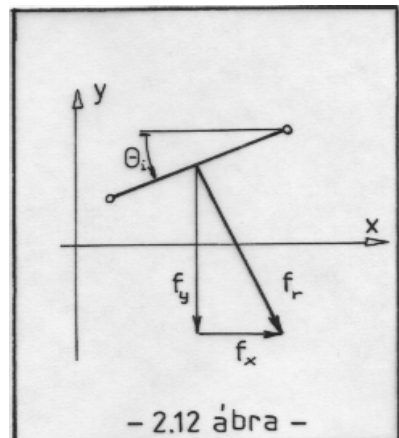
A számításból eleve a (V / V_∞) értéket határozzuk meg, így a nyomástényező (2.20) felhasználásával egyszerűen megkapható.

A felhajtóerő-tényezőt kétféleképpen számítjuk. Ez egyébként a számítás egyfajta ellenőrzése is: amennyiben e két mód szerint kb. azonos értéket kapunk, úgy az eredmény elfogadható. Az első módszer a cirkuláció felhasználásával történő számítás. Másodszor a nyomásmegoszlásból határozzuk meg majd a felhajtóerő-tényezőt. Az első számítást a (2.5) szerint végezzük:

$$c_y = \frac{2 \Gamma}{V_\infty h} = \frac{4 \pi}{h} \oint \gamma' d\xi = \frac{4 \pi}{h} \sum_{j=1}^m \left[(\gamma'_{j+1} + \gamma'_j) \frac{S_j}{2} \right]; \quad (2.21)$$

A felhajtóerő-tényező számításának másik útja a nyomásból származó erő meghatározása. Ez a számítási út több eredményt ígér: a felhajtóerő mellett meghatározható a nyomáskülönbségből származó erő megfúvási sebesség irányú összetevője is. Ennek az erő-összetevőnek elméletileg nullának kell lennie, az eltérés jellemzi a számítás pontosságát.

A 2.12 ábrán egy, a profil kontúrpointjait összekötő vonaldarab és a rá ható erők (\mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y , \mathbf{f}_r) láthatók. A nyomásból származó erőt, definíció szerint a következő módon számíthatjuk:



$$\bar{\mathbf{R}} = - \int_{(A)} p \, d\bar{\mathbf{A}} = - \oint p \, \bar{\mathbf{n}} \, ds ;$$

A számításban a dimenziótlan erőtényezőket kívánjuk meghatározni, ehhez az erőt a szokásos módon dimenziótlanítjuk (a számítási síkra merőlegesen egységnyi méretet tételezünk fel):

$$\mathbf{f}_r = \frac{\bar{\mathbf{R}}}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 (1h)} = - \oint c_p \, \bar{\mathbf{n}} \, ds ; \quad (2.22)$$

(2.22)-nek megfelelően az " x " illetve " y " tengely irányába eső, az "i"-edik panelen keletkező erő-összetevők összegzésével kapjuk a következő kifejezéseket:

$$f_x = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m c_{pi} S_i \sin \Theta_i \quad \text{és} \quad f_y = - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m c_{pi} S_i \cos \Theta_i ; \quad (2.23)$$

Ezek a dimenziótlan erő-összetevők elforgatandók így a sebességre merőleges és párhuzamos összetevőt számítjuk ki. Ez az állásszöggel történő elforgatással lehetséges, végül tehát a felhajtóerő-tényező illetve a számítás pontosságát jellemző tényező:

$$c_y = f_y \cos \alpha - f_x \sin \alpha \quad \text{és:} \quad c_{hiba} = f_y \sin \alpha + f_x \cos \alpha .$$

A következő a nyomatéki tényező számításának bemutatása. Ebben a munkában a húrnegyedre vonatkoztatott nyomatéki tényezőt határozzuk meg. Az előbbieken meghatározott rész erők (2.23-ban az összegezett elemek) a nekik megfelelő ellenőrző pontban hatnak. A nyomaték számítása jobbsodrású koordináta rendszerben:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x F_y - y F_x \end{bmatrix} .$$

Innen következik, hogy a " z " tengely körüli nyomaték (az (x,y) helyére az (X_i, Y_i) ellenőrző-pont koordinátákat írva):

$$M_z = \sum_{i=1}^m [F_{yi} X_i - F_{xi} Y_i] ; \quad \text{illetve a nyomatéki-tényező: } m = \frac{M}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 (1h) h} ;$$

ahol az " 1 " a síkra merőleges (egységnyi) méret.

Végeredményben, az erőtényezők alapján, a húrnegyedre vonatkozó nyomatéki tényező:

$$m_{h/4} = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^m \left[f_{yi} \left(X_i - \frac{h}{4} \right) - f_{xi} Y_i \right] ; \quad (2.24)$$

Ezzel a profilszámítási eljárás elméleti része rendelkezésünkre áll.

2.1 Melléklet :

AZ ÖRVÉNY-PANEL MÓDSZER

(Számítógép-program)

A következőkben a 2.3 pontban részletezett számításra kidolgozott, TURBO-BASIC forrásnyelvű programot ismertetjük. Az alkalmazott programnyelv egyszerű és ezért viszonylag könnyen áttekinthető programlistát eredményez. A nyelv szabályai [8]-ban olvashatók. A programhoz nem tartozó megjegyzéseket dőlt betűvel írtuk. Ezek a megjegyzések segítenek a program működésének megértésében, voltaképpen helyettesítik a blokkdiagrammot.

A program két nagy részre oszlik: az első a "Főprogram", a második az inhomogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer megoldó, "Schmidt eljárás" elnevezésű segédprogram.

Ebben, a 2.1 mellékletben a zárt alakban kiszámított integrálok felhasználásával megírt programot ismertetjük. A húr hosszát és a zavartalan áramlás sebességét egyaránt egységnyire választottuk. Ez - ideális közeg esetében, egy profil vizsgálatakor - mindig megtehető és nem jelent külön megszorítást.

FŐPROGRAM

A program a kontúr pontok számának (m+1) megadásával kezdődik, majd ezután következik az indexes változók dimenzionálása.

```
m=12 : m1=m+1 : pi=3.14159265358
dim Xk(m1),Yk(m1) , X(m) ,Y(m) , s(m),se(m) , ce(m),theta(m),v(m),cp(m),aq(m1,m1)
dim cn1(m,m),cn2(m,m),ct1(m,m),ct2(m,m),an(m1,m1),rhs(m1),gw(m1),gamma(m1)
```

Ezután a kontúr pontok adatai következnek (Xk(i),Yk(i)) - itt rögtön egységnyi húr hosszhoz tartozóan, ha nem ez lenne a helyzet, akkor ezeket az adatokat el kellene osztani a húr hosszal (vagy az elméleti részben adott, húr hosszát is tartalmazó képleteket kellene használni). A pontokat a 2.10-es ábrán adott sorrendben írjuk be, azaz az (1,0) ponttal kezdünk és - mivel a profil zárt - ezzel végzünk is (ez lesz a 13. pont).

```
data 1,0 , 0.933,-5e-3 , 0.75,-0.017 , 0.5,-0.033 , 0.25,-0.042 , 0.067,-0.033
data 0,0 , 0.067,0.045 , 0.25,0.076 , 0.5,0.072 , 0.75,0.044 , 0.933,0.013 , 1,0
for i=1 to m1 : read Xk(i),Yk(i) : next i
```

A profil kontúr pontjainak beolvasása után, ellenőrzés céljából felrajzoltatjuk a profilt a képernyőre. Ekkor megállapítható és javítható az esetleges hiba.

```
screen 11 : cls : print
window(-0.1,0.5)-(-1.1,-0.3):print " PROFILKONTUR"
for i=1 to m : line(Xk(i),Yk(i))-(Xk(i+1),Yk(i+1)) : next i
```

input " Tovabb ";tova\$: if tova\$="n" then stop : screen 0

A továbbiakban szükség lesz az ellenőrző pontok koordinátáira (X(i),Y(i)), az egyes panelek ívhosszára (s(i)) és a Θ szögek sinus-ára (se(i)) illetve cosinus-ára (ce(i)). Ezek következnek itt.

```
for i=1 to m
  X(i) = (Xk(i)+Xk(i+1))/2 : Y(i)=(Yk(i)+Yk(i+1))/2
  s(i) = sqr((Xk(i) - Xk(i+1))^2 + (Yk(i) - Yk(i+1))^2)
  ce(i)=(Xk(i+1)-Xk(i))/s(i) : se(i)=(Yk(i+1)-Yk(i))/s(i)
next i
```

A számításban több mennyiséget ismételten is fel kell használni. Időtakarékosságból, a jobb áttekinthetőség érdekében és helytakarékoságból is célszerű segédváltozókat definiálni. A segédváltozók meghatározása után pedig kiszámíthatók a (2.14/a és 2.14/b) kifejezésekkel adott cn2(i,j) és cn1(i,j) értékek. Az első címkét (cim1) az i=j eset kezelésére vezettük be. A második és harmadik címke (cim2 és cim3) az Arctan függvény számítása miatt vált szükségessé. Együttal kiszámítjuk a ct2(i,j) és a ct1(i,j) mátrix-elemeket is, ezzel határozható majd meg a sebesség-eloszlás (2.19 szerint).

```
for i=1 to m
  for j=1 to m
    if i=j then goto cim1
    ca=ce(j)*ce(j)-se(j)*se(j) : cb=2*se(j)*ce(j)
    a1=X(i)-Xk(j) : a2=Y(i)-Yk(j)
    c=se(i)*ce(j)-ce(i)*se(j):d=ce(i)*ce(j)+se(i)*se(j)
    a=-a1*ce(j)-a2*se(j) : b=a1*a1+a2*a2
    cl=se(i)*ca-ce(i)*cb : ck=ce(i)*ca+se(i)*cb
    e=a1*se(j)-a2*ce(j) : f=log(1+s(j)*(s(j)+2*a)/b)
    si=e*s(j):co=b+a*s(j)
    if abs(co)<1e-5 and si>0 then g=pi/2 : goto cim3
    if abs(co)<1e-5 and si<0 then g=3*pi/2 : goto cim3
    g=atn(si/co)
    if co<0 then g=g+pi : goto cim3
    if co>0 and si<0 then g=2*pi-g

    cim3:
    p=a1*cl+a2*ck:q=a1*ck-a2*cl
    cn2(i,j)=d+q*f/s(j)/2-(a*c+d*e)*g/s(j) : cn1(i,j)=d*f/2+c*g-cn2(i,j)
    ct2(i,j)=c+p*f/s(j)/2+(a*d-c*e)*g/s(j) : ct1(i,j)=c*f/2-d*g-ct2(i,j)
    goto cim2

    cim1:
    cn1(i,j)= -1 : cn2(i,j)=1 : ct1(i,j)=pi/2 : ct2(i,j)=pi/2
  cim2:
next j
next i
```

A cirkuláció-számításban alkalmazandó együttható mátrix (an(i,j)) és a sebesség számításban használt együttható mátrix (aq(i,j)) elemeinek meghatározása következik. Csak megjegyezzük:

azért nem alkalmazható az $at(i,j)$ jelölés, mert az "at" BASIC-alapszó, így változó deklarációjára nem használható.

```
for i=1 to m1:for j=1 to m1:an(i,j)=0:aq(i,j)=0:next j:next i
for i=1 to m
  an(i,1)=cn1(i,1):an(i,m1)=cn2(i,m):aq(i,1)=ct1(i,1):aq(i,m1)=ct2(i,m)
  for j=1 to m
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1):aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i
an(m1,1)=1 : an(m1,m1)=1
```

A (2.18) egyenletrendszer jobboldalának $rhs(i)$ meghatározása következik. Az "rhs" elnevezés az eredeti, angol névnek felel meg. Az "ujra" címke új állásszöggel történő ismételt számítás esetén kap szerepet: ebben az esetben a program ide tér vissza és így nem kell újra számolni az együttható mátrixok elemeit, amelyek egyébként csak a geometriai adatoktól függenek.

ujra:

```
cls      :      print      :      print
input " Kerem az allaszoget [fok]: ";alfa : alfa=alfa*pi/180
for i=1 to m : rhs(i)= se(i)*cos(alfa)-ce(i)*sin(alfa) : next i
rhs(m1)=0
```

Az eddigiekkel meghatároztuk a megoldandó egyenlet-rendszert, ezután a megoldás következik. A megoldást a bevezetőben említett alprogram végzi, a Schmidt féle orthogonalizációs eljárás alapján. Erre nézve [7] tanulmányozását ajánlhatjuk. A megoldási módszer egyébként egyike a legjobb direkt megoldó módszereknek.

call schmidt

Az alprogram listája - a program szintaxisának megfelelően - a főprogram vége után következik. A "Schmidt" eljárás eredménye a cirkuláció megoszlást meghatározó $\gamma(i)$ értékek sorozata. Ezek ismeretében, az $aq(i,j)$ felhasználásával a profil körüli sebesség-eloszlás meghatározható. Hasonlóképpen kiszámíthatók - (2.20) szerint - a nyomástényezők is.

```
print : print
print "-----"
print " i          v(i)          cp(i)" : print

for i=1 to m
  v(i)=ce(i)*cos(alfa)+se(i)*sin(alfa)
  for j=1 to m1
    v(i)=v(i)+aq(i,j)*gamma(j)
  next j
  cp(i)=1-v(i)^2
  print i,v(i),cp(i)
next i
```

```

print
print "-----"
input " Tovabb (i/n) ";tt$ : if tt$="n" then stop
cls

```

A nyomtatás - ebben az esetben - a képernyőre történik. Itt lesz látható, hogy a sebességek, ahol az ívelem irányítása ellentétes a sebesség irányával, negatív előjelet kapnak. Azért, hogy az eredményeket meg tudjuk tekinteni, beírtuk az utolsó előtti sort. E sor egyébként lehetőséget ad a program futásának megszakítására is, ha ez mutatkozna szükségesnek.

A számítás végcéljának tekintett felhajtóerő-tényező (cycirk és cyprofil) meghatározása következik. Ezt az elméleti részben bemutatott két úton tesszük. A cirkuláció alapján végzett számítás alapja a (2.21), a nyomáseloszlás alapján történő számítást (2.23) szerint végezzük. Ez utóbbi eljárás, az elméleti részben mondottak szerint, alkalmas a nyomatéki tényező (cm) számítására is (2.24).

```

print "-----"
cy=0 : cx=0 : s1=0 : cm=0
for i=1 to m
  fy=-s(i)*cp(i)*ce(i)
  fx=s(i)*cp(i)*se(i)
  fm=-fy*(x(i)-0.25)-fx*y(i)
  s1=s1+(gamma(i)+gamma(i+1))*s(i)/2
  cy=cy+fy : cx=cx+fx : cm=cm+fm
next i
cyprofil=cy*cos(alfa)-cx*sin(alfa)
chiba=cy*sin(alfa)+cx*cos(alfa)
cycirk=4*pi*s1
print
print "Felhajtoero tenyezo - nyomasbol:      ";cyprofil
print "          - cirkulaciobol:          ";cycirk
print
print "Nyomas szamitas hibaja:              ";chiba
print
print "A nyomateki tenyezo a hurnegyedre:    ";cm
print
print alfa*180/pi;" fok allaszognel"
print "-----"

```

Ez a vizsgálat végeredménye. Abban az esetben, ha a kétféle felhajtóerő tényező egymáshoz elegendően közel van, illetve a "chiba" elég kicsi, akkor az eredményt elfogadhatjuk. Profilkatalógusbeli profilok számításakor cycirk kb. 10 %-kal a mért eredmény felett, cyprofil kisebb, a mért értékhez közelebb adódik (mivel cycirk mindig nagyobb, mint a valóságos közegben mérhető felhajtóerő-tényező). A programban egyébként a NACA 2412-es profil szerepel, a számítási eredményeket a programismertetés után mutatjuk be.

A futtatás leállítása előtt mód van új állásszöggel történő számolásra. Ebben az esetben a program az "ujra" címkénél folytatódik.

```
input " Lesz uj allaszog (i/n)      ";uj$ : if uj$="i" then goto ujra
end
```

Itt következik az egyenletrendszer megoldó alprogram. Az alprogramban vannak lokális változók, melyeket csak itt használunk ("local" deklaráció) és globális változók, amelyek itt is és a főprogramban is érvényesek ("shared" deklaráció).

```
sub schmidt
shared m1,an(),rhs(),gamma()
local gw(),cw(),s1,s2,s3
dim cw(m1,m1),gw(m1)

for i=1 to m1
  for j=1 to m1:cw(i,j)=0:next j
  gw(i)=0
next i

for i=1 to m1 : cw(1,i)=an(1,i) : next i
gw(1)=rhs(1)

for k=2 to m1
  s3=0
  for i=1 to k-1
    s1=0:s2=0
    for j=1 to m1 : s1=s1+an(k,j)*cw(i,j) : s2=s2+cw(i,j)*cw(i,j) : next j
    s1=-s1/s2
    for j=1 to m1 : cw(k,j)=cw(k,j)+s1*cw(i,j) : next j
    s3=s3+s1*gw(i)
  next i
  gw(k)=rhs(k)+s3
  for j=1 to m1 : cw(k,j)=cw(k,j)+an(k,j) : next j
next k

for i=1 to m1
  s1=0
  for k=1 to m1 : s1=s1+cw(i,k)*cw(i,k) : next k
  gw(i)=gw(i)/s1
next i

for i=1 to m1
  s1=0
  for j=1 to m1 : s1=s1+gw(j)*cw(j,i) : next j
  gamma(i)=s1
next i

end sub
```

A program futtatási eredményei:

Amint azt már említettük, a programba a NACA 2312 profil adatait írtuk be. Az ellenőrző pontokban számított sebességet és nyomástényezőt a következő táblázatban mutatjuk be:

Sorszám i	Sebesség v(i)	Nyomás tényező cp(i)
1	-0.8585	0.2630
2	-0.8962	0.1969
3	-0.8890	0.2097
4	-0.8563	0.2667
5	-0.7276	0.4707
6	0.0840	0.9929
7	1.6764	-1.8102
8	1.5839	-1.5088
9	1.3905	-0.9334
10	1.2288	-0.5099
11	1.0811	-0.1688
12	0.9125	0.1674

A sebesség előjeléről már szóltunk: ott, ahol a sebesség értelme ellentétes az ívelem irányításával - ez a helyzet a profil alján, az 1-től 6 kontúrponthoz között - ott a sebesség negatív. A 6. ellenőrző pont közel van a belépő torlóponthoz, itt a sebesség közel nulla. A többi (felső) ellenőrző pontban pozitív sebességet kapunk. Az is figyelemre méltó, hogy a profil alatti sebességek abszolút értéke egynél kisebb; felette majdnem mindegyik egynél nagyobb. Ez azt jelenti: a profil alatt kisebb, felette nagyobb sebesség alakul ki - úgy, ahogyan azt az elméleti ismereteink alapján elvárjuk.

A nyomástényező - amit a (2.20) alapján számítottunk - ott, ahol a sebesség abszolút értéke egynél nagyobb - negatív. Annál nagyobb negatív szám, minél nagyobb a sebesség abszolút értéke. Ez egyébként szemléletes is, hiszen a negatív előjel depressziót jelez. A profil felett pedig tényleg viszonylagos nyomáscsökkenést kell találnunk. A profil alatti pozitív nyomástényezők a viszonylagos túlnyomást mutatják, éppen úgy, ahogy annak lennie kell.

A számítás végeredménye a felhajtóerő-tényező, a nyomás számítás hibája és a húrnegyedre vonatkozó nyomatéki tényező:

cyprofil = 1.1036 cyczirk = 1.1792 (a profilkatalógusból: cy = 1.06)
(chiba = 0.0747) és cm = -0.0714 (a profilkatalógusból: cm = -0.15)

A konkrét példa mutatja az eredmények egyezését egymással és a szélcsatorna méréssel, a felhajtóerő-tényező esetében. A nyomatéki tényező értéke meglehetősen pontatlan. (A húrnegyedre vonatkozó nyomatéki tényező negatív, mivel jobbsodrású rendszerben az orrnehéz nyomaték a negatív.) A nyomás-számítás hibája (chiba) viszonylag nagy érték, utal az eljárás "kényességére".

2.2 Melléklet:

ÖRVÉNY-PANEL MÓDSZER NUMERIKUS INTEGRÁLÁSSAL
(Számítógép-program)

A $cn2(i,j)$ és $cn1(i,j)$ számítása, amint azt az elméleti részben megjegyeztük, több okból bizonytalan. Ezt bárki igen egyszerűen kipróbálhatja: a fenti programot futtassa le úgy, hogy egy kontúrpontra koordinátáját kis mértékben megváltoztatja. "Sikeres" változtatás esetén az eredmény teljességgel használhatatlan lesz. Ezen a problémán segít az alábbi program. Ez majdnem minden vonatkozásában azonos az előbbivel, csak az integrálást végzi el numerikusan, kivéve a szinguláris eseteket. A programnyelv és az általános megjegyzések azonosak az előbbiekkkel.

Főprogram:

```

m=12 : m1=m+1 : pi=3.14159265358
dim Xk(m1),Yk(m1) , X(m) ,Y(m) , s(m),se(m) , ce(m),theta(m),v(m),cp(m),aq(m1,m1)
dim cn1(m,m),cn2(m,m),ct1(m,m),ct2(m,m),an(m1,m1),rhs(m1),gw(m1),gamma(m1)

'-----
'PROFIL ADATOK KOVETKEZNEK
'-----
data 1,0,0.933,-5e-3,0.75,-0.017,0.5,-0.033,0.25,-0.042,0.067,-0.033
data 0,0,0.067,0.045,0.25,0.076,0.5,0.072,0.75,0.044,0.933,0.013,1,0
for i=1 to m1 : read Xk(i),Yk(i) : next i

'-----
'PROFILKONTUR RAJZOLTATASA
'-----
screen 11 : cls : print
window(-0.1,0.5)-(1.1,-0.3):print " PROFILKONTUR"
for i=1 to m:line(Xk(i),Yk(i)-(Xk(i+1),Yk(i+1)):next i
input " Tovabb ";tova$ : if tova$="n" then stop
screen 0 : locate 12,20 : print "SZAMOLOK"

'-----
'IVHOSSZ, SZOG ES ELLENORZO PONT SZAMITAS KOVETKEZIK
'-----
for i=1 to m
  X(i) = (Xk(i)+Xk(i+1))/2 : Y(i)=(Yk(i)+Yk(i+1))/2
  s(i) = sqr((Xk(i) - Xk(i+1))^2 + (Yk(i) - Yk(i+1))^2)
  ce(i)=(Xk(i+1)-Xk(i))/s(i):se(i)=(Yk(i+1)-Yk(i))/s(i)
next i

```

Itt következik az a programrész, amely eltér az előzőtől. A numerikus integrálást [7] szerint, a Simpson formula alkalmazásával végeztük el.

```

for i=1 to m
  wxi=Xk(i+1)-Xk(i) : wyi=Yk(i+1)-Yk(i)
  for j=1 to m

    if i=j then goto clem
    wsum=0 : wsul=0 : qsum=0 : qsul=0 : dsj=s(j)/100
    ctj=(Xk(j+1)-Xk(j))/s(j) : stj=(Yk(j+1)-Yk(j))/s(j)

    for k=0 to 100
      sj=k*dsj : xj=Xk(j)+sj*ctj : yj=Yk(j)+sj*stj
      if int(k/2)<>k/2 then k1=4 else k1=2
      if k=0 or k=100 then k1=1
      wx=x(i)-xj : wy=y(i)-yj : wn=wx*wx+wy*wy
      wm=(-wx*wxi-wy*wyi)/wn/s(i) : wq=(-wx*wyi+wy*wxi)/wn/s(i)
      wm1=(1-sj/s(j))*wm : wm2=sj/s(j)*wm : wq1=(1-sj/s(j))*wq : wq2=sj/s(j)*wq
      wsum=wsum+k1*wm1 : wsul=wsul+k1*wm2
      qsum=qsum+wq1*k1 : qsul=qsul+k1*wq2
    next k

    ct1(i,j)=qsum*dsj/3 : ct2(i,j)=qsul*dsj/3
    cn1(i,j)=wsum*dsj/3 : cn2(i,j)=wsul*dsj/3
    goto adel

  clem:
  cn1(i,j)= -1 : cn2(i,j)=1 : locate 18,30 : print i;" . panel"
  ct1(i,j)=pi/2 : ct2(i,j)=pi/2
  adel:
next j
next i

```

A program innentől teljesen azonos az előzővel.

```

for i=1 to m1:for j=1 to m1:an(i,j)=0:aq(i,j)=0:next j:next i
for i=1 to m
  an(i,1)=cn1(i,1):an(i,m1)=cn2(i,m):aq(i,1)=ct1(i,1):aq(i,m1)=ct2(i,m)
  for j=2 to m
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1):aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i
an(m1,1)=1 : an(m1,m1)=1
ujra:

cls : print : print
input " Kerem az allasztoget [fok]: ";alfa : alfa=alfa*pi/180
for i=1 to m : rhs(i)=se(i)*cos(alfa)-ce(i)*sin(alfa) : next i
rhs(m1)=0

```

```

call schmidt

print : print
print "-----"
print " i          v(i)          cp(i)":print
for i=1 to m
  v(i)=ce(i)*cos(alfa)+se(i)*sin(alfa)
  for j=1 to m1
    v(i)=v(i)+aq(i,j)*gamma(j)
  next j
  cp(i)=1-v(i)^2
  print i,v(i),cp(i)
next i
print
print "-----"
input " Tovabb (i/n) ";tt$:if tt$="n" then stop
cls
'-----
' A FEHAJTOERO TENYEZO ES ELLENALLAS SZAMITAS KOVETEKZIK
'-----

print "-----"
cy=0:cx=0 : s1=0 : cm=0
for i=1 to m
  fy=-s(i)*cp(i)*ce(i)
  fx=s(i)*cp(i)*se(i)
  fm=-fy*(x(i)-0.25)-fx*y(i)
  s1=s1+(gamma(i)+gamma(i+1))*s(i)/2
  cy=cy+fy : cx=cx+fx : cm=cm+fm
next i
cyprofil=cy*cos(alfa)-cx*sin(alfa)
chiba=cy*sin(alfa)+cx*cos(alfa)
cycirk=4*pi*s1
print
print "Felhajtoero tenyezo - nyomabol:          ";cyprofil
print "          - cirkulaciobol:          ";cycirk
print
print "Nyomas szamitas hibaja:          ";chiba
print "A nyomateki tenyezo a hurnegyedre:          ";cm
print
print alfa*180/pi;" fok allaszognel"
print
print "-----"
input " Lesz uj allaszog (i/n) " ; uj$ : if uj$="i" then goto ujra
end

```

Itt következik az egyenlet-megoldó, azonos az előzőekben ismertetettel.

Megjegyzések a számításhoz:

A program szintén a NACA 2412-es profil adatait tartalmazza. A számítási eredményeket külön nem ismertetjük, mivel azok majdnem teljesen azonosak a zárt alakú integrálással számítottakkal (csak a 7-8. értékes jegyben van eltérés). Van azonban egy jelentős különbség: ez az eljárás elbírja a profilkoordináták megváltoztatását. Az így átalakított program sokkal szélesebb körben alkalmazható mint az első eljárás. Hátránya, hogy a számítási idő lényegesen hosszabb.

Amennyiben pontosabb eredményre van szükség, növelhető a profilon felvett pontok száma. Ez egy bizonyos határig növeli az eredmény pontosságát, de természetesen legfeljebb csak az elvileg megszabott határig - a gyakorlatban nyilván eddig sem juthatunk el, hiszen az eljárás realizálása során (esetleg jelentős) numerikus hiba is előáll.

E pont befejezésképp egy fontos megjegyzést teszünk. A cirkuláció számítás inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldását követeli. Ezt az egyenletrendszert különböző módszerekkel lehet megoldani és a megoldás pontossága szükség esetén fokozható is. A fenti példa adataival számított mátrix kondíció-száma pl. 644.5, ami meglehetősen magas érték (erre utaltunk a nyomás-számítás hibájánál alkalmazott "kényes" jelzővel). Ezt a kondíció-számot az un. x^2 normában számítottuk. A vonatkozó szakirodalom ajánlja még a Hadamard féle kondíció-számot is, ami akkor jelent rosszul kondicionáltságot, ha ez a szám jóval kisebb 1-nél. Gyakorlatilag azonban minden eljárásban az egyhez közeli kondíció-szám a jó. A feladatot fizikai oldalról vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a profilok aerodinamikai sajátosságait döntően befolyásolja a profil alakja, azaz a kontúrponok elhelyezkedése. Ennek a ténynek felel meg az a matematikai megállapítás, miszerint az együttható-mátrix **gyengén kondicionált**.

Ezek szerint tehát a feladat megoldása erősen függ a mátrix elemeitől, ezeket az elemeket a geometriai viszonyok határozzák meg - így tehát a megoldás nagyon nagy mértékben függ a profil geometriájától. Mivel pedig a geometriát csak közelítőleg vettük figyelembe - hiszen a profilt töröttvonallal helyettesítettük - ezért a megoldás e közelítéstől is erősen függ. Az általunk alkalmazott módszer az első módszerek egyike, igényesebb vizsgálat esetén célszerű a módszert tovább fejleszteni (lineáris helyett jobb közelítések mind a kontúrvonal mind a cirkuláció-megoszlás esetében). Ezt a pontatlanságot tapasztaltuk akkor, amikor az ellenállás-tényező hibáját elemeztük és felbukkan majd abban az esetben is, amikor két profilt számolunk.

2.4 Több profil együttes számítása.

A gyakorlati feladatok megoldása során felmerül több, egymáshoz közel elhelyezkedő profil számításának a kérdése is. Ilyen feladat lehet a szárny-csűrő együttes vagy pl. a kétfedelű repülőgépek alsó és felső szárnyának együttműködése. Ezt az esetet vizsgáljuk meg itt.

Az alapesetben - egy profil vizsgálatánál - az egyes paneleken elhelyezett megoszló örvények sebesség-indukcióját számítottuk az éppen szóban forgó ellenőrző pontban. Jelen esetben ugyanezt kell tennünk, csak a sebesség-indukcióban részt vesz a másik profilt helyettesítő örvény-rendszer is. Ez azt jelenti, hogy az együttható-mátrix tulajdonképpen egy hiper-mátrix lesz, a bal felső rész az első profil saját indukciója, a jobb felső rész az a második profil indukciója az első profilon, a bal alsó rész az első profil indukciója a második profilon, végül a jobb alsó rész a második profil saját indukciója lesz.

Legyen az első profil kontúrpontjainak száma $(n+1)$, a második profil kontúrpontjai ekkor az $(n+2)$ - től indulnak és tartanak $(m+1)$ - ig. Ezzel - az előzőekben leírtak szerint - felírható a cirkuláció számítás együttható mátrixa (táblázatos formában):

$\begin{matrix} a_n(i,1) \\ = \\ c_{n1}(i,1) \\ \\ i \\ = \\ 1,2,..n \\ j=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,j) \\ = \\ c_{n1}(i,j) \\ + \\ c_{n2}(i,j-1) \\ \\ i=1,2,..n \\ \text{és} \\ j=2,3,..n \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,n+1) \\ = \\ c_{n2}(i,n) \\ \\ i \\ = \\ 1,2,..n \\ j=n+1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,n+2) \\ = \\ c_{n1}(i,n+2) \\ \\ i \\ = \\ 1,2,..n \\ j=n+2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,j) \\ = \\ c_{n1}(i,j) \\ + \\ c_{n2}(i,j) \\ \\ i=1,2,..n \\ \text{és} \\ j=n+3,..m \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,j) \\ = \\ c_{n2}(i,m+1) \\) \\ \\ i \\ = \\ 1,2,..n \\ j=m+1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 \\ i=n+1 \\ j=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,..0 \\ i=n+1 \\ j=2,3,..n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ i=n+1 \\ j=n+1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ i=n+1 \\ j=n+2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,..0 \\ i=n+1 \\ j=n+3,..m \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ i=n+1 \\ j=m+1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} a_n(i,1) \\ = \\ c_{n1}(i,1) \\ \\ i=n+2,.. \\ m \\ j=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,j) \\ = \\ c_{n1}(i,j) \\ + \\ c_{n2}(i,j-1) \\ \\ i=n+2,..m \\ j=2,3,..n \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,n+1) \\ = \\ c_{n2}(i,n) \\ \\ i=n+2,.. \\ m \\ j=n+1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,n+2) \\ = \\ c_{n1}(i,n+2) \\ \\ i=n+2,..m \\ j=n+2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,j) \\ = \\ c_{n1}(i,j) \\ + \\ c_{n2}(i,j-1) \\ \\ i=n+2,..m \\ j=n+3,..m \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_n(i,m+1) \\ = \\ c_{n2}(i,m) \\ \\ i=n+2,..m \\ j=m+1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 \\ i=m+1 \\ j=1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,..0 \\ i=m+1 \\ j=2,3,..n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ i=m+1 \\ j=n+1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ i=m+1 \\ j=n+2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,..0 \\ i=m+1 \\ j=n+3,..m \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ i=m+1 \\ j=m+1 \end{matrix}$

Az itt bemutatott együttható-mátrix első három oszlopa és első két sora szerepel az egyedülálló profil számításánál. Hipermátrixként tekintve, ez az első almátrix, a második a negyedik-ötödik-hatodik oszlop és az első két sor. A további almátrixok már egyértelműen következnek az eddig leírtakból.

A második és a negyedik sor egyébként a síma leáramlás feltétele; a második sor az első profilra, a negyedik sor a második profilra vonatkozik. Ennek megfelelően az ismeretlen cirkulációk oszlopvektora illetve a jobboldal a következő módon adható meg:

γ_i $i=1,2,..n$	$\sin(\Theta_i - \alpha)$ $i=1,2,..n$
γ_{n+1}	0
γ_i $i=n+2,..m$	$\sin(\Theta_i - \alpha)$ $i=n+2,..m$
γ_{m+1}	0

Az egyenletrendszer ezen a módon minden további nélkül összeállítható, a megoldás pedig az előbbieken leírt úton meghatározható.

A következőkben egy példaszámítás programlistáját mutatjuk be. A bemutatás elvei illetve a leírás formája az előbbieken alkalmazottakkal azonosak. A példaprogramban két NACA 2412-es profil szerepel, az első azonos az első példaprogrambeli profillal, a második húr hossza (1/2) egység és az első profil alatt kb. fél húr hossznyira helyezkedik el, úgy, hogy az orrpontok egy függőlegesre esnek. Külön ábra helyett ezt a helyzetet a példaprogram beírásával illetve futtatásával tanulmányozhatjuk. Következzen tehát a program-lista:

2.3 Melléklet:**KÉT-PROFIL PROGRAM**
(Számítógép-program)

Az előbbiekhöz hasonlóan először a profilpontok számát határozzuk meg (az első profil kontúrpointjai 1-től 13-ig; a másodiké 14-től 26-ig futnak). Az egyszerűség kedvéért a második profilt az első koordinátáinak transzformálásával adtuk meg.

```
m=25 : m1=m+1 : pi=3.14159265358
dim Xk(m1),Yk(m1),X(m),Y(m),s(m),se(m),ce(m),theta(m),v(m),cp(m),aq(m1,m1)
dim cn1(m,m),cn2(m,m),ct1(m,m),ct2(m,m),an(m1,m1),rhs(m1),gw(m1),gamma(m1)
```

Itt következnek a profil-adatok, először a nagyobbik, felső profil koordinátái, a pontok a 2.10 ábrának megfelelően a kilépőélnél kezdődnek és ott is fejeződnek be:

```
data 1,0 , 0.933,-5e-3 , 0.75,-0.017 , 0.5,-0.033 , 0.25,-0.042 , 0.067,-0.033
data 0,0 , 0.067,0.045 , 0.25,0.076 , 0.5,0.072 , 0.75,0.044 , 0.933,0.013 , 1,0
for i=1 to 13 : read Xk(i) , Yk(i) : next i
```

Ezek itt a második profil koordinátái, amelyeket az első profil koordinátáinak transzformálásával állítunk elő:

```
for i=14 to 26 : Xk(i)=Xk(i-13)/2 : Yk(i)=Yk(i-13)/2-0.5 : next i
```

A profilok kirajzoltatása következik, itt válik láthatóvá a profilok elhelyezése és összehasonlítható a húrhosszúságuk is.

```
screen 11 : cls : print
window(-0.1,0.3)-(1.1,-0.8) : print "          PROFILKONTUR"
for i=1 to 12 : line ( Xk(i) , Yk(i) ) - (Xk(i+1) , Yk(i+1)) : next i
for i=14 to 25 : line( Xk(i) , Yk(i) ) - (Xk(i+1) , Yk(i+1)) : next i

input " Tovább ";tova$:if tova$="n" then stop
```

A program a továbbiakban majdnem teljesen azonos a 2.2 mellékletben közölt programmal, ezután ott fűzünk csak kommentárt a listához, ahol ez szükséges.

```

screen 0 : locate 12,20 : print "SZAMOLOK"
'-----
'Ivhossz, szog es ellenorzo pont - szamitas kovetkezik
'-----
for i=1 to m
  X(i)=(Xk(i)+Xk(i+1))/2 : Y(i)=(Yk(i)+Yk(i+1))/2
  s(i)=sqr((Xk(i)-Xk(i+1))^2+(Yk(i)-Yk(i+1))^2)
  ce(i)=(Xk(i+1)-Xk(i))/s(i):se(i)=(Yk(i+1)-Yk(i))/s(i)
next i
'-----
'Segedmennyisegek szamitasa kovetkezik
'-----
for i=1 to m
  wxi=xb(i+1)-xb(i) : wyi=yb(i+1)-yb(i)
  for j=1 to m
    if i=j then goto clem
    wsum=0 : wsul=0 : qsum=0 : qsul=0 : dsj=s(j)/100
    ctj=(Xk(j+1)-Xk(j))/s(j) : stj=(Yk(j+1)-Yk(j))/s(j)
    for k=0 to 100
      sj=k*dsj : xj=Xk(j)+sj*ctj : yj=Yk(j)+sj*stj
      if int(k/2)<>k/2 then k1=4 else k1=2
      if k=0 or k=100 then k1=1
      wx=x(i)-xj : wy=y(i)-yj : wn=wx*wx+wy*wy
      wm=(-wx*wxi-wy*wyi)/wn/s(i) : wq=(-wx*wyi+wy*wxi)/wn/s(i)
      wm1=(1-sj/s(j))*wm : wm2=sj/s(j)*wm : wq1=(1-sj/s(j))*wq : wq2=sj/s(j)*wq
      wsum=wsum+k1*wm1 : wsul=wsul+k1*wm2
      qsum=qsum+wq1*k1 : qsul=qsul+k1*wq2
    next k
    ct1(i,j)=qsum*dsj/3 : ct2(i,j)=qsul*dsj/3
    cn1(i,j)=wsum*dsj/3 : cn2(i,j)=wsul*dsj/3
    goto adel
  clem:
  cn1(i,j)=-1 : cn2(i,j)=1 : locate 18,30 : print i ; ". panel"
  ct1(i,j)=pi/2 : ct2(i,j)=pi/2
  adel:
next j
next i
'-----
' Az egyutthato matrix elemei kovetkeznek
'-----
for i=1 to m1 : for j=1 to m1 : an(i,j)=0 : aq(i,j)=0 : next j : next i
'----- az elso profil saját indukciója -----
for i=1 to 12
  an(i,1)=cn1(i,1) : an(i,13)=cn2(i,12) : aq(i,1)=ct1(i,1) : aq(i,13)=ct2(i,12)
  for j=2 to 12
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1) : aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i

```

```
'----- masodik profil ----> else profil -----
for i=1 to 12
  an(i,14)=cn1(i,14) : an(i,26)=cn2(i,25) : aq(i,14)=ct1(i,14) : aq(i,26)=ct2(i,25)
  for j=15 to 25
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1):aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i
```

```
'----- else profil ---> masodik profil -----
for i=14 to 25
  an(i,1)=cn1(i,1) : an(i,13)=cn2(i,12) : aq(i,1)=ct1(i,1) : aq(i,13)=ct2(i,12)
  for j=2 to 12
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1) : aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i
```

```
'----- masodik profil saját indukciója -----
for i=14 to 25
  an(i,14)=cn1(i,14) : an(i,26)=cn2(i,25) : aq(i,14)=ct1(i,14) : aq(i,26)=ct2(i,25)
  for j=15 to 25
    an(i,j)=cn1(i,j)+cn2(i,j-1) : aq(i,j)=ct1(i,j)+ct2(i,j-1)
  next j
next i
```

Az itt következő sor a síma leáramlás feltétele az első illetve a második profilról:

```
an(13,1)=1 : an(13,13)=1 : an(26,14)=1 : an(26,26)=1
```

```
'-----
'Az allaszog es a jobboldal kovetkezik
'-----
```

ujra:

```
cls : print : print
input " Kerem az allaszoget [fok]: " ; alfa : alfa=alfa*pi/180
for i=1 to m : rhs(i)=se(i)*cos(alfa)-ce(i)*sin(alfa) : next i
rhs(13)=0 : rhs(26)=0
```

```
'-----
'A megoldas kovetkezik
'-----
call schmidt
```

```

'-----
' A sebességszámítás következik
'-----

                print : print
print "-----"
print "          Felső profil" : print
print " i          v(i)          cp(i)" : print
for i=1 to 12
  v(i)=ce(i)*cos(alfa)+se(i)*sin(alfa)
  for j=1 to m1
    v(i)=v(i)+aq(i,j)*gamma(j)
  next j
  cp(i)=1-v(i)^2
  print i,v(i),cp(i)
next i
print
print "-----"
input " Tovább (i/n) ";tt$: if tt$="n" then stop
cls

                print : print
print "-----"
print "          Also profil" : print
print " i          v(i)          cp(i)" : print
for i=14 to 25
  v(i)=ce(i)*cos(alfa)+se(i)*sin(alfa)
  for j=1 to m1
    v(i)=v(i)+aq(i,j)*gamma(j)
  next j
  cp(i)=1-v(i)^2
  print i,v(i),cp(i)
next i
print
print "-----"
input " Tovább (i/n) ";ttwr$: if ttwr$="n" then stop
cls

'-----
' A felhajtóero-tenyezo es ellenallas számítás következik
'-----

print "-----Első profil-----"
cy=0 : cx=0 : s1=0 : cm=0
for i=1 to 12
  fy=-s(i)*cp(i)*ce(i) : fx=s(i)*cp(i)*se(i) : fm=-fy*(x(i)-0.25)-fx*y(i)
  s1=s1+(gamma(i+1)+gamma(i))*s(i)/2
  cy=cy+fy : cx=cx+fx : cm=cm+fm
next i
cyprofil=cy*cos(alfa)-cx*sin(alfa)
chiba=cy*sin(alfa)+cx*cos(alfa)
cycirk=4*pi*s1

```

```

print
print "Felhajtoero tenyezo - nyomasbol:      ";cyprofil
print "          - cirkulaciobol:          ";cycirk
print
print "Nyomas szamitas hibaja:              ";chiba
print "A nyomateki tenyezo a hurnegyedre:    ";cm
print alfa*180/pi;" fok allaszognel"

print : print

print "-----Masodik profil-----"
cy=0 : cx=0 : s1=0 : cm=0
for i=14 to 25
  fy=-s(i)*cp(i)*ce(i) : fx=s(i)*cp(i)*se(i) : fm=-fy*(x(i)-0.25)-fx*y(i)
  s1=s1+(gamma(i+1)+gamma(i))*s(i)/2 : cy=cy+fy : cx=cx+fx : cm=cm+fm
next i
cyprofil=(cy*cos(alfa)-cx*sin(alfa))*2
chiba=(cy*sin(alfa)+cx*cos(alfa))*2
cycirk=4*pi*s1/(1/2)

```

A második profilnál, mivel annak húr hossza 1/2 egység, a cirkulációból számított felhajtóerő-tényezőnél a húr hosszal osztani kell - ez az 1/2-es osztó a cycirk-ban.

```

print
print "Felhajtoero tenyezo - nyomasbol:      ";cyprofil
print "          - cirkulaciobol:          ";cycirk
print
print "Nyomas szamitas hibaja:              ";chiba
print "A nyomateki tenyezo a hurnegyedre:    ";cm
print alfa*180/pi;" fok allaszognel"

print "-----V E G E-----"

input " Lesz uj allaszog (i/n) ";uj$:if uj$="i" then goto ujra

end

```

Ezzel a program gyakorlatilag véget ért, ezután következnek még a 2.1 mellékletben leírt Schmidt féle egyenletmegoldó eljárás, ezt azonban már nem listázzuk, mivel az ismeretlenek számától eltekintve az előbbivel teljesen azonos.

A program futtatási eredményei:

A számítást az előző esethez hasonlóan, a 8 fokos állásszögre végeztük el. Így a kapott eredmények közvetlenül összevethetőek a 27. oldalon közölt futtatási eredményekkel. Először az első, az egységnyi húr hosszúságú, felül elhelyezkedő profil eredményeit mutatjuk be:

A FELSŐ PROFIL SZÁMÍTOTT JELLEMZŐI

Sorszám i	Sebesség v(i)	Nyomás tényező cp(i)
1	-0.8708	0.2418
2	-0.9347	0.1263
3	-0.9689	0.0612
4	-1.0112	-0.0225
5	-0.9403	0.1159
6	-0.1482	0.9780
7	1.5855	-1.5140
8	1.5764	-1.4852
9	1.3967	-0.9507
10	1.2383	-0.5333
11	1.0934	-0.1954
12	0.9170	0.1590

Elegendő pl. a sebességek összehasonlítása, hiszen a nyomástényező ebből egyértelműen következik. A profil feletti sebességek kicsit kisebbek, mint az egyedülálló profil esetében voltak (7 - 12-es pont), de az eltérés nem túl nagy. Mégis, a várható kisebb felhajtóerő tényezőnek megfelelően, ezek a sebességek általában kisebbek. Jelentősebb az eltérés a profil alján: itt komoly sebesség-növekedést találunk (pl. 4-es pontban +18 %). Ez egyértelműen az alsó profil hatása a felsőre, az alsó profilon keletkező cirkuláció gyorsítja a felső alatti áramlást.

Az alsó, rövidebb profilon számított sebesség és nyomáseloszlást szintén táblázatban foglaltuk össze. Ezek az eredmények nagyobb mértékben térnek el az alapként tekintett, egyedülálló profil eredményeitől, mint a felső profil megfelelő jellemzői. Mind a profil alatt, mind a profil felett viszonylag jelentős lassulást találunk. Ez megfelel annak a fizikai elvárásnak, ami szerint a nagyobb profil kisebbre gyakorolt hatása jelentősebb, mint a kisebb profil nagyobbra kifejtett hatása.

AZ ALSÓ PROFIL SZÁMÍTOTT JELLEMZŐI

Sorszám i	Sebesség v(i)	Nyomás tényező cp(i)
1	-0.8001	0.3598
2	-0.8383	0.2972
3	-0.8321	0.3077
4	-0.7979	0.3633
5	-0.6680	0.5537
6	0.1008	0.9898
7	1.5426	-1.3796
8	1.4219	-1.0218
9	1.2410	-0.5401
10	1.1093	-0.2306
11	0.9899	0.0202
12	0.8441	0.2875

A megfelelő integrálások elvégzése után a felhajtóerő-tényező (kétféle érték) és a nyomatéki tényező értékét az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

Felső profil	Felhajtóerő-tényező nyomásból:	0.90484
	cirkulációból:	0.92222
	Nyomatéki-tényező:	-0.05705
Alsó profil	Felhajtóerő-tényező nyomásból:	0.86374
	cirkulációból:	1.02706
	Nyomatéki tényező:	0.025551

Az eredmények alapján néhány megállapítást tehetünk:

- a felső profilra számított kétféle felhajtóerő-tényező eltérése elegendően kicsi;
- az alsó profilnál ugyanez az eltérés, egyébként azonos körülmények között jelentősen nagyobb - ez az eltérés talán még elfogadható, de más pozícióban még ennél is nagyobb eltérést találnánk;
- a nyomás számítás hibája (a felső profilnál 0.06439, az alsónál 0.055337) az előző számításhoz hasonló nagyságrendű, még megengedhető érték;
- az alsó profilra vonatkozó nyomatéki tényező nem az alsó profil orrpontjára, hanem a felső profil orrpontjára vonatkozik;
- a nyomatéki tényezők értéke is eltér a profilkatalógusban megadott értéktől.

Ez a számítási eljárás tehát kellő elővigyázattal alkalmazandó, elsősorban a felhajtóerő-tényező meghatározására alkalmas, a nyomatéki tényező értéke viszonylag messze van a reálistól.

A profilszámítás itt befejeződik, de, természetesen számos kérdés nyílik meg, amelyre a korszerű számítástechnika birtokában választ kereshetünk. Nagyon fontos az alapeljárás fejlesztése, amelyre már utaltunk is. Ezen túl ide tartozik az összenyomhatóság hatásának figyelembe vétele, amelyre több ismert módszer létezik.

Érdekes és fontos lehet a profil körül kialakuló határréteg vizsgálata is. Ezzel a valóságos viszonyokat sokkal jobban közelítő eredményeket kaphatunk.

3. VÉGES SZÁRNYAKON KIALAKULÓ CIRKULÁCIÓ MEGOSZLÁS SZÁMÍTÁSA

A véges szárnyak aerodinamikai tulajdonságainak vizsgálata fontos kérdés. A 2. fejezetben a szárnyprofilokkal foglalkoztunk. A szárnyprofilok, illetve a velük kapcsolatos számítások kétdimenziós, azaz síkáramlásban érvényesek. A véges szárnyak körül térbeli, vagyis háromdimenziós áramlás alakul ki. A következő vizsgálatok nagyon fontos részét képezik majd azok a feltételek, amelyek lehetővé teszik, hogy a profilelmélet eredményeit a véges szárnyak analízisében alkalmazhassuk.

E fejezetben két módszert mutatunk be; az első a klasszikus, karcsú, egyenes szárnyak vizsgálatára alkalmas módszer (a **Prandtl-Glauert** féle integro-differenciál-egyenlet megoldása). Ez egy hatékony, jól bevált, sokszor ellenőrzött eljárás, de csak egyenes, nagykarcsúságú szárnyak vizsgálatára alkalmas. Másodikként egy fejlettebb módszert mutatunk be. Ez a módszer az eredeti, **Biot-Savart** törvény alapján a repülőgépszárnyakra felírt alapegyenlet numerikus megoldásán alapul - nagyon széles körben alkalmazható, igen hasznos eljárás.

3.1 Örvény-fonalak sebesség indukciójának vizsgálata

A véges szárnyak elméletében a szárnyat örvény-rendszerrel helyettesítjük (hordozó és leúszó örvények, melyeket az indulási örvény zár be), úgy, hogy az áramlás az örvény-rendszer hatására hasonlóan változzon, mintha a szárny lenne ott. Az örvényekre érvényesnek tekintjük a **Kelvin** tételt, ami szerint: $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$. Lényegében a **Kelvin** tétel következményei a **Helmholz** féle örvény-tételek, amelyeket tehát szintén érvényesnek fogadunk el. E szerint feltételezzük, hogy az elemi intenzitású örvény szálak örvény-nyalábot alkotnak, melynek eredő cirkulációja állandó ($\Gamma = \text{áll.}$).

Egy ilyen örvény-nyalábot egyetlen vonalra koncentrálva kapunk egy véges intenzitású, örvény-fonalat, erre felírhatjuk a **Biot-Savart** törvényt, ami szerint az "s" görbe mentén elhelyezkedő, "Γ" intenzitású örvény-fonal a "P" pontban " \bar{w} " sebességet indukál:

$$\bar{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{(s)} \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3} \quad . \quad (3.1)$$

Vizsgáljuk meg ezt az indukált sebességet abban az esetben, ha az örvény-fonal az "x" tengely mentén elhelyezkedő egyenes vonal (3.1 ábra). Az indukált sebességet a "P" pontban keressük, amelyet az egyszerűség kedvéért az "y" tengelyen veszünk fel. Legyen az örvény-fonal intenzitása pozitív (Γ). Az integrálást a $(-\infty < x < \infty)$ nyílt intervallumon kell elvégezni.

A **Biot-Savart** törvény integranduszában lévő vektori szorzat elemei (a 3.1 ábra alapján):

$$d\vec{s} = \begin{bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

innen a vektori szorzat:

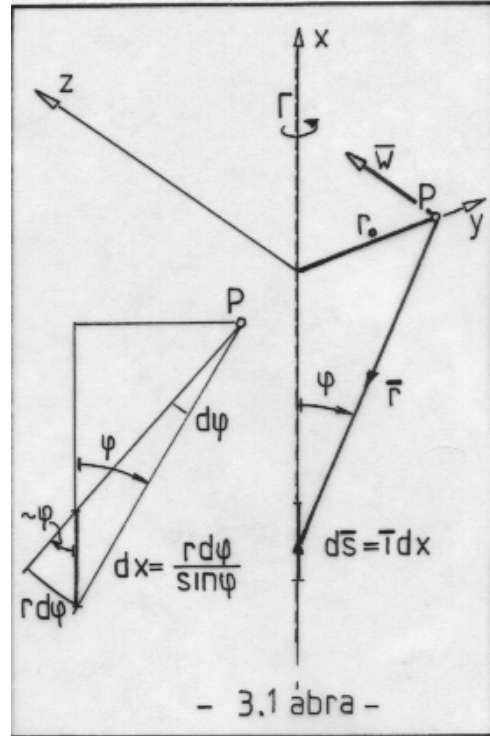
$$d\vec{s} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -dx r \sin \varphi \end{bmatrix} ; \text{ helyettesítsük be a 3.1 ábra alapján a } dx = r d\varphi / \sin \varphi$$

összefüggést, ezzel kiszámíthatjuk az indukált sebességet, melynek - természetesen - csak "z" irányú összetevője lesz:

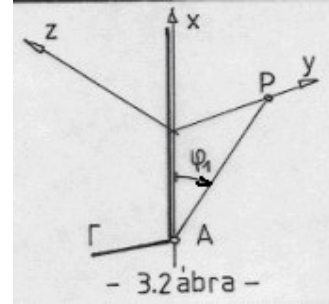
$$\vec{w}|_z = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r \sin \varphi (r d\varphi / \sin \varphi)}{r^3} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r} ; \quad (3.2)$$

Itt az integrálási határokat már az új változónak megfelelően (φ) írtuk be. Ezeket mindig az örvény-fonal hosszának megfelelően választhatjuk, pl. a 3.1 ábrán vázolt esetben $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \pi$. Végezetül, az $r = r_0 / \sin \varphi$ helyettesítéssel:

$$\vec{w}|_z = - \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = - \frac{\Gamma}{4\pi r_0} [\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} ; \quad (3.3)$$



Jelen esetben, amikor az örvény-fonal végtelen egyenes és így a fent megadott határokat kell behelyettesíteni, a végeredmény (a vektorjelölést elhagyva): $w = \frac{\Gamma}{2 \pi r_0}$, a jól ismert, klasszikus eredményt adja. A következő vizsgálatokban előfordul az az eset is, amikor a Γ intenzitású örvény az " x " tengelyt az " A " pontban éri el (3.2 ábra) és a $+\infty$ -ig tart.



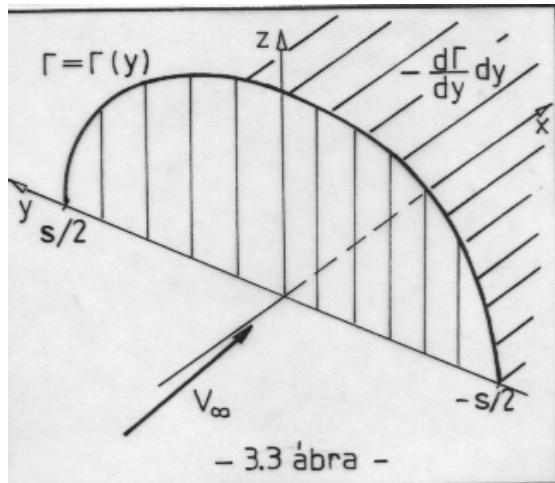
Ekkor az eredő indukált sebesség:

$$w = - \frac{\Gamma}{4 \pi r_0} [- 1 - \cos \varphi_1] = \frac{\Gamma}{4 \pi r_0} (1 + \cos \varphi_1) ; \quad (3.4)$$

3.2 Karcsú, egyenes szárnyak vizsgálata

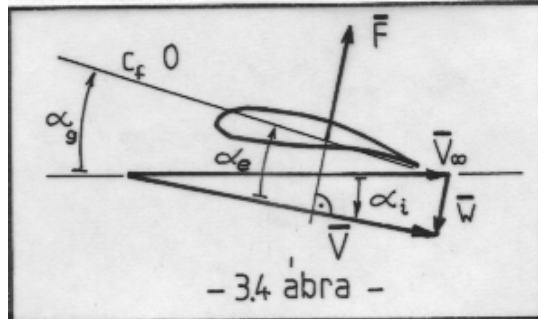
Az egyenes, karcsú szárnyak számítására alkalmas eljárást **Ludwig Prandtl** dolgozta ki - ezt, a legegyszerűbbnek tekinthető eljárást ismertetjük itt. Az eljárást általában **hordozó-vonal elmélet**-nek is nevezik, mivel benne a szárnyat egy "hordozó vonallal" helyettesítjük. Ezen a vonalon helyezkedik el az a megoszló cirkuláció (örvény), ami a szárnynak megfelelően működik, azaz hatására közelítőleg akkora és közelítőleg olyan eloszlású felhajtóerő keletkezik, mint a tényleges szárnyon. Az eljárás természetesen több tekintetben közelítő módszer, ez a későbbiekben részleteiben is látható lesz.

A szárnyat egy, a 3.3 ábrán látható hordozó vonallal helyettesítjük, amely az " y " tengelyen, a $(-s/2)$ -tól a $(s/2)$ -ig tart. A hordozó vonalon megoszló örvényt helyezünk el, amely a szárnyvégeken nulla intenzitású. Feltételezzük, hogy - a **Kelvin** tétel értelmében - a hordozó vonal mentén elhelyezett örvény változásának (-1) -szerese lesz a leúszó örvény. Feltételezzük azt is, hogy ezek a leúszó örvények végtelen hosszú félegyenesek, a hordozó vonal megfelelő pontjából indulnak és a végtelenig tartanak.



A hordozó-vonal elmélet feltételezi, hogy az egyes profilok körül síkáramlás alakul ki, de ezek állásszöge "alkalmasan" változik. Ezt a változást az indukált állásszög (3.4 ábra) bevezetésével éri el.

Ismeretes, hogy az örvények sebességet indukálnak. Azt állítjuk, hogy a hordozó örvények által indukált sebesség a hordozó vonalnál nagyon kicsi (ez pl. próbaszámolással ellenőrizhető), így itt csak a leúszó örvények által indukált sebességet kell figyelembe venni. A zavartalan áramlás sebessége (\bar{V}_∞) és az indukált



sebesség (\bar{W}) által meghatározott szöget nevezzük indukált állásszögnek. A profil *alpvonala* (lehetőleg a nulla felhajtóerő irány) és a *zavartalan áramlási sebesség* által bezárt szög a *geometriai állásszög*. A profilelmélet alkalmazása azt jelenti, hogy a profilok egy "effektív" állásszögön működnek, ami a geometriai és az indukált állásszög összegzésével - előjelet is figyelembe vevő összeadásával - áll elő.

A szárnyvégeken biztosan nem keletkezik felhajtó-erő, ezért ott az effektív állásszögnek nullának kell lennie. (Ez a számítás peremfeltétele.) Mivel csak a leúszó örvények sebesség-indukcióját számítjuk és mert ezek végtelen félegyenesek, az eljárás csak egyenesnek tekinthető hordozóvonal esetén alkalmazható, illetve a leúszó örvények viselkedése (pl. felcsavarodása, gyengülése) e számításban nem vehető figyelembe.

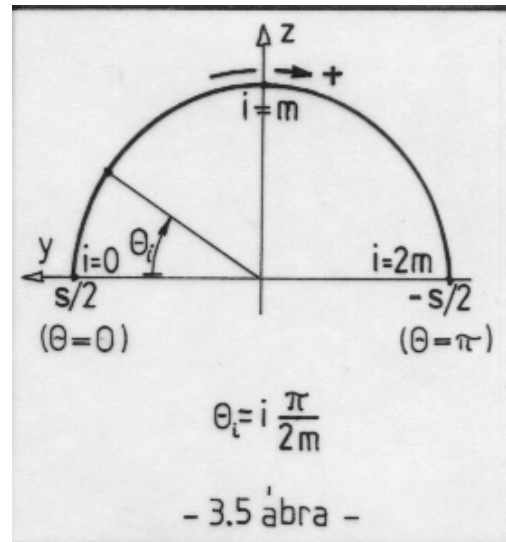
A fesztáv menti koordináta (y) helyett új változót vezetünk be (3.5 ábra):

$$y = \frac{s}{2} \cos \Theta ; \quad (3.5)$$

illetve az i -edik fesztáv menti koordináta esetén:

$$y_i = \frac{s}{2} \cos \Theta_i .$$

Az új változóra azért van szükség, hogy a cirkuláció-megoszlást **Treffz** nyomán egyenlőre ismeretlen együtthatókkal rendelkező, **Fourier** sorral írassuk le (ez a leírás igen jó tulajdonsággal rendelkezik: **tetszőleges** - véges - A_k -k esetén kielégíti az a feltételt, ami szerint a cirkulációnak a szárnyvégen nullának kell lennie):



$$\Gamma [z(\Theta)] = \frac{1}{2} a_{0m} h_m V_\infty \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k \Theta) ; \quad (3.6)$$

ahol:

$$a_0 = \frac{d c_f}{d \alpha} , \text{ a profil mért vagy számított jellemzője;}$$

h - a profil húrhossza;

A_k - Fourier sor együttható;

m - a szimmetria-síkot jelző index.

Annak érdekében, hogy a profil elméletet alkalmazhassuk, azt kell mondani: az egyes szárny-metszeteket nem a \bar{V}_∞ sebességű megfúvás éri, hanem egy, \bar{w} indukált sebességgel elfordított, \bar{V} sebességű áramlás (3.4 ábra).

Ezzel kapcsolatban néhány szót kell szólni az indukált sebességről. Ennek lényegében két összetevője van.

Az **elsőfajú indukált sebességet** a hordozó örvény hozza létre, abszolút értéke arányos a szárnyon keletkező felhajtó erővel - ezért a szárnyvégeken értéke nulla és általában a szimmetria-síkban maximális.

A **másodfajú indukált sebességet** a leúszó örvény hozza létre, értéke a szárny közepén, szimmetrikus viszonyok esetén minimális és általában a szárnyvégeken maximális.

E kétféle indukált sebesség értéke helyről-helyre változik. A különböző számítási eljárásokban különböző vizsgálati helyeket definiálunk, így az indukált sebesség-összetevők ettől függően szintén változnak. Egyenes szárny vizsgálatakor csak a másodfajú indukált sebességet vesszük figyelembe, mondván, hogy a vizsgálat helye a hordozó-vonal, ahol az elsőfajú indukált sebesség értéke nulla.

Erre a másodfajú indukált sebességre tesszük a fenti megállapítást, miszerint ez már a hordozó vonalnál létezik illetve már ott kifejti a teljes hatását. Ez a feltevés nem teljesen fedi a fizikai valóságot, de alkalmazásával jó eredményekhez juthatunk. Mivel a szárnyprofiloknál mondottak szerint a felhajtóerő merőleges az eredő megfúvási sebességre (\bar{V} - 3.4 ábra), azért a véges szárnyon keletkező felhajtó erőnek lesz két összetevője; az első, \bar{V}_∞ -re merőleges az általában felhajtóerőnek nevezett erő-összetevő, a második a \bar{V}_∞ -nel párhuzamos, amit általában indukált ellenállásnak nevezünk. Ez a magyarázata annak, hogy az indukált ellenállást ebben az elméletben a leúszó örvényeknek tulajdonítjuk. Ezzel kapcsolatban később, az indukált ellenállás számításánál kitérünk **Munk** tételére, ami a fenti, fizikai okfejtés matematikai formába öntött megfogalmazása. A 2. fejezetben bemutattuk, hogy a profilokon is - ez a végtelen karcsú szárny esete - keletkezik indukált ellenállás, ennek fizikai oka a kétszeres indukált sebesség illetve az emiatt kialakuló áramkép. Így magyarázhatjuk meg, hogy a szimmetria síkban is létrejön indukált ellenállás, illetve, hogy a véges szárny indukált ellenállása a profil indukált ellenállásának és a térbeli áramlási viszonyok miatti indukált ellenállásnak az összege. A számítás alapegyenlete a következő:

$$\alpha_e = \alpha_g + \alpha_i ; \quad (3.7)$$

Ezt az egyenletet a 3.4 ábra alapján írhatjuk fel, azt mondja ki, hogy egy profil effektív állásszöge a geometriai állásszög és az indukált állásszög összege. Ne feledkezzünk meg arról, hogy a szögeknek is van előjelük, amit a pozitív forgásirány alapján határozhatunk meg. (Ezt pl. a 3.3 ábráról állapíthatjuk meg.) Ennek megfelelően az **indukált állásszög általában negatív**, így a (3.7)-beli összegzés tulajdonképpen persze kivonás, úgy, ahogyan azt az egyszerű geometriai szemlélet alapján el is várnánk. Ugyanúgy ennek felel meg az a tény is, hogy amíg a megfúvási sebesség pozitív, addig az indukált sebesség negatív (ez az általunk választott koordináta-rendszerben igaz így) - ezért az indukált állásszög innen tekintve is negatív.

A (2.5) egyenlet - **Kutta-Zsukovszkij** tétel - szerint az egységnyi széles szárnydarabon keletkező erő: $F' = \rho V_\infty \Gamma$. Ugyanezt az erőt meghatározhatjuk a felhajtóerő-tényező segítségével is: $F' = \rho \frac{V_\infty^2}{2} c_f h = \rho \frac{V_\infty^2}{2} (a \alpha_e) h$. Ez utóbbi egyenlet ilyen felírása megköveteli, hogy a geometriai állásszöget a mindenkor nulla felhajtóerő-iránytól mérjük. Eszerint a szárny esetleges konfiguráció változása (pl. ívelőlap nyitás, csűrő mozgatás, orrsegédszárny nyitás stb.) a felhajtóerő-tényező iránytangensének változásán túl a geometriai állásszög-eloszlás változásában is megjelenik.

A fenti két erő-egyenletből kifejezhető az effektív állásszög:

$$\alpha_e = \frac{2 \Gamma}{a_0 V_\infty h} = \frac{a_{0m} h_m}{a_0 h} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\Theta \quad ; \quad (3.8)$$

Az indukált sebességet egy " P " pontban, a már elmondottak szerint a leúszó örvények által indukált sebességgel vesszük azonosnak. Ezt a (3.4) kifejezés felhasználásával számíthatjuk, ha $\varphi_1 = 0$ értéket választunk. A 3.3 ábrán megadott örvény-intenzitással $[(-d\Gamma/dy)dy]$ és az r_0 helyére $(y_p - y)$ -t írva a következő összefüggést kapjuk:

$$w_p = - \frac{1}{4 \pi (y_p - y)} \frac{d\Gamma}{dy} dy \quad ;$$

A 3.3 ábra alapján értelmezhető az " y_p " helyen keltett teljes indukált sebesség, amelyet az elemi indukált sebességek fesztáv menti integrálásával határozunk meg:

$$w = - \frac{1}{4 \pi} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{d\Gamma / dy}{y_p - y} dy \quad ; \quad (3.9)$$

Először az indukált állásszög kifejezését írjuk fel, majd utána behelyettesítjük a (3.5) szerinti, új változót (Θ), illetve végül figyelembe vesszük, hogy: $(d\Gamma / dy) dy = (d\Gamma / d\Theta) d\Theta (dy / dy) = (d\Gamma / d\Theta) d\Theta$, ezzel:

$$\alpha_i \cong \frac{w_i}{V_\infty} = - \frac{1}{4 \pi V_\infty} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{d\Gamma / dy}{y_p - y} dy = - \frac{2}{4 \pi V_\infty s} \int_{\pi}^0 \frac{d\Gamma / d\Theta}{\cos \Theta_p - \cos \Theta} d\Theta \quad ;$$

Írjuk be ide a cirkuláció (3.6) szerinti kifejezésének deriváltját, egyúttal felcseréljük az integrálás határait és a nevezőben szereplő szögfüggvényeket (így az előjel nem változik):

$$\alpha_i = - \frac{2}{4 \pi V_\infty s} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} a_{0m} h_m V_\infty \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \cos k\Theta}{\cos \Theta - \cos \Theta_p} d\Theta \quad ; \quad (3.10)$$

Az integrálban szereplő függvény a következő segéd összefüggés felhasználásával számítható ki (ez részletesen [1]-ben olvasható):

$$\int_0^\pi \frac{\cos k\Theta}{\cos \Theta - \cos \Theta_p} d\Theta = \pi \frac{\sin k\Theta_p}{\sin \Theta_p} ; \quad \text{ezzel:}$$

$$\alpha_i = - \frac{a_{0m} h_m}{4 s} \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \frac{\sin k\Theta_p}{\sin \Theta_p} ; \quad (3.11)$$

A (3.7) alapegyenletbe beírjuk az effektív állásszög (3.8) kifejezését illetve az indukált állásszög (3.11) szerinti kifejezését, akkor a Θ_p - vel meghatározott feszítáv menti koordinátánál a következő egyenletet kapjuk:

$$\alpha_g(\Theta_p) = \alpha_e - \alpha_i = \frac{a_{0m} h_m}{a_0 h} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\Theta + \frac{a_{0m} h_m}{4 s} \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \frac{\sin k\Theta_p}{\sin \Theta_p} ; \quad (3.12)$$

Ez a hordozóvonal elmélet alapegyenlete, amelyből az A_k ismeretleneket - véges számban persze - meghatározhatjuk. Ehhez ismerni kell a geometriai állásszöget, a húrhosszakat, a profiljellemzőket és a szárny feszítávját. A 3.5 ábrán $(2m+1)$ db. pontot vettünk fel. Ebből a 0 indexű és a $(2m+1)$ indexű semmitmondó, mivel ezek a perem-pontok és tudjuk, hogy itt a cirkuláció nulla, amit egyébként (3.6) automatikusan teljesít is. Ezért, végül is $(2m-1)$ darab ismeretlent számítunk majd ki.

A (3.12) alapján felírhatjuk a következő inhomogén, lineáris, algebrai egyenlet-rendszert:

$$\overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\alpha}_g ; \quad (3.13)$$

ahol az együttható mátrix elemei:

$$b_{jk} = a_{0m} h_m \left(\frac{1}{a_{0j} h_j} + \frac{k}{4 s \sin \Theta_j} \right) \sin(k\Theta_j) ;$$

az ismeretlenek vektora, illetve a jobboldal pedig:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_{2m-1} \end{bmatrix} ; \quad \overline{\alpha}_g = \begin{bmatrix} \alpha_{g1} \\ \vdots \\ \alpha_{gk} \\ \vdots \\ \alpha_{g,2m-1} \end{bmatrix} .$$

Ez, az eddigi eredményeinkhez hasonlóan inhomogén, lineáris algebrai egyenlet-rendszer, amelyet az előzőekben leírt módon oldunk majd meg. Csak megjegyezzük, hogy egy feladat,

melynek modellje lineáris, általában lineáris egyenletrendszerre vezet illetve a nemlineáris feladatok nem vezetnek lineáris egyenlet-rendszerre.

Belátható - bár ezt a tényt a későbbiekben nem használjuk ki - hogy szimmetrikus cirkuláció-eloszlás esetén a páros együtthatók értéke nulla, hiszen ebben az esetben a Fourier sorban páratlan függvényt kapunk - a szimmetrikus eset approximációjában pedig ilyeneknek nincs helye. A szakirodalomban ebben az esetben a "k" helyett a $k = 2l - 1$ jelölés bevezetésével az $l = 1, 2, \dots, m$ felhasználásával csak a páratlan indexű A_k -kat számítják.

Az egyenletrendszer megoldása után, A_k -k ismeretében számítható a felhajtóerő fesztáv menti megoszlása:

$$c_{fj} = \frac{\rho V_\infty \Gamma(y_j)}{q_\infty h_j} = \frac{a_{0m} h_m}{h_j} \sum_{k=1}^{2m-1} A_k \sin(k \Theta_j) ; \quad (3.14)$$

ahol: $q_\infty = \frac{\rho}{2} V_\infty^2$ (a dinamikai nyomás).

A teljes szárnyra vonatkoztatott felhajtóerő a fesztáv menti átlagolással határozható meg (itt "A" -val a szárny felületét jelöljük):

$$c_{f\ sz} q_\infty A = \int_{-s/2}^{s/2} c_f(y) q_\infty h dy ; \quad \text{azaz: } c_{f\ sz} = \int_{-s/2}^{s/2} \frac{c_f h}{A} dy . \quad (3.15)$$

ahol: $dy = -\frac{s}{2} \sin \Theta d\Theta$.

Helyettesítsük (3.15)-be a felhajtóerő-tényező (3.14)-ben adott kifejezését, alkalmazzuk ismét az új változót (Θ) és cseréljük fel az integrálás határait ($0-\pi$), akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$c_{f\ sz} = \frac{a_{0m} h_m s}{A} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2m-1} [A_k \sin(k\Theta) \sin(\Theta)] d\Theta = \frac{a_{0m} h_m \pi s}{4 A} A_1 ; \quad (3.16)$$

mivel: $\int_0^\pi \sin(k\Theta) \sin \Theta d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq 1 \\ \pi/2 & \text{ha } k = 1 \end{cases}$.

Ezek szerint tehát az eredő felhajtóerő-tényezőt A_1 egyedül határozza meg. Ez a szakirodalomban jól ismert eredmény: a számunkra hasznos felhajtó erőt egyedül az első együttható adja, az összes többi együttható csak az ellenállás növelésében játszik szerepet. Ezért a legjobb az "elliptikus eloszlás", hiszen ez az az eset, amikor az A_1 -en kívül az összes többi együttható nulla.

Az eredő felhajtóerő-tényező középérték, a legkisebb (helyi) értéknél nagyobb és kisebb a (helyi) maximumnál. Ez fontos az átesés vizsgálatokor, hiszen az egész szárny nyilván nem érheti el az egyedülálló profil (végtelen szárny) felhajtóerő maximumát. A kritikus állásszög értéke kívül esik a lineáris tartományon, így szigorúan véve nem is szabad erről beszélni, de mivel ez egy nagyon fontos kérdés, megkockáztatjuk az itt következő, rövid megjegyzést. Első - igen nagyvonalú - közelítésként kimondhatjuk, hogy az egyes profilok átesés szempontjából a geometriai állásszögön működnek, itt nem szabad az indukált állásszöget figyelembe venni. Ez ugyan csábító lenne, de pl. a szárnyvégen az effektív állásszög nulla - így a szárnyvég soha nem eshetne át, ami nyilvánvaló ellentmondás. Tulajdonképpen oda jutottunk, hogy a felhajtóerő-tényező szempontjából az effektív állásszöget kell figyelembe venni, az átesésnél viszont marad a geometriai állásszög.

Az indukált ellenállás számítása következik. Ezzel kapcsolatban egy fontos megjegyzést kell tennünk. A karcsú, egyenes szárnyak elméletét **Prandtl** 1918-ban írta le, tanítványa **Munk** 1919-ben, a doktori értekezésében kimondott egy tételt, ami szerint örvények áramlásirányban - bizonyos feltételek esetén - eltolhatók. Ennek a tételnek számos gyakorlati alkalmazásával találkozunk, itt arra hívjuk fel a figyelmet, hogy e tétel következményeként mondható ki: *indukált ellenállást a hordozó örvény nem kelt.* Vagyis: az indukált ellenállás a leúszó örvények hatására keletkezik; számítása a következő összefüggéssel lehetséges:

$$c_{ei} = - \alpha_i c_f ; \quad (3.17)$$

A (3.17)-ben azért kell negatív előjelet alkalmazni, mivel az ellenállás tényezők hagyományosan pozitívak, az indukált állásszög viszont negatív. Ez a kifejezés egy-egy szárnymetszetre vonatkozik, így a teljes szárny indukált ellenállását átlagolással határozzuk meg:

$$\tilde{c}_{ei} = \int_{-s/2}^{s/2} \frac{c_{ei}(y) q_\infty h(y)}{q_\infty A} dy ; \quad (3.18)$$

$$\text{ahol: } c_{ei}(y) = \frac{a_{0m}^2 h_m^2}{4 s h(y)} \left(\sum_{k=1}^{2m-1} A_k \sin k\Theta(y) \right) \left(\sum_{l=1}^{2m-1} l A_l \frac{\sin l\Theta(y)}{\sin \Theta(y)} \right) .$$

Ezt az integrált ugyan néhány, speciális esetben zárt alakban is ki lehet számítani, általában azonban célszerű numerikusan integrálni. Erre mutat példát a 3.1 melléklet-ben található program is.

Néhány további számítást mutatunk még be, ezek részben helyi jellemzők, részben általános, az egész szárnyra vonatkozó jellemzők meghatározását célozzák. Először a véges szárny egy metszetében (a fesztáv menti koordinátát θ - val jelöljük) érvényes felhajtóerő-tényező meredekséget határozzuk meg:

$$a_0(\Theta) \alpha_e(\Theta) = c_f(\Theta) = a(\Theta) \alpha_g(\Theta) \Rightarrow a(\Theta) = a_0(\Theta) \frac{\alpha_e(\Theta)}{\alpha_g(\Theta)} = a_0(\Theta) \frac{1}{1 - \frac{\alpha_i(\Theta)}{\alpha_e(\Theta)}}$$

illetve behelyettesítve ide az indukált állásszög (3.10) és az effektív állásszög (3.8) kifejezését, kapjuk a következő kifejezést:

$$a(\Theta) = \frac{a_0(\Theta)}{1 - \frac{a_0(\Theta) h(\Theta)}{4s} \frac{\sum_{k=1}^{2m-1} k A_k \frac{\sin(k\Theta)}{\sin\Theta}}{\sum_{l=1}^{2m-1} A_l \sin(l\Theta)}}$$

Számítsuk ki végül a teljes szárnyra érvényes felhajtóerő-tényező meredekséget:

$$a = \frac{1}{A} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} a(\Theta) h(\Theta) \frac{d\Theta}{d\Theta} dy = \frac{s}{2A} \int_0^{\pi} a(\Theta) h(\Theta) \sin\Theta d\Theta ;$$

Ezt a kifejezést nem érdemes zárt alakban kiszámítani, általában is numerikusan célszerű integrálni. A bemutatott példa-program is numerikus integrálást alkalmaz.

3.1 Melléklet:

KARCSÚ, EGYENES SZÁRNY SZÁMÍTÁSA (Számítógép-program)

A számítógépi program, az eddigiekhez hasonlóan, TURBÓ BASIC nyelven íródott. Az ismertetése szintén a már megismert módon történik. Mivel a számítás nem túl bonyolult, ezért blokkdiagrammot nem készítettünk. A példa-szárny fesztávolsága 10 méter, a geometriai állásszög azonos (10 fok) és a húr hossz (h=1 méter) sem változik. A felhajtóerő-tényező meredeksége végig 2π , és $m=8$, azaz 15 darab együtthatót határozzunk meg. Ezek közül a párosak elvileg is valamint a számítás szerint is nulla értékűek.

```
'-----
' Veges szarny jellemzoinak szamitasa a hordozovonal elmelet alapjan
'-----
n=16 : m=n/2 : n1=n-1 : pi=3.14159265358 : cls
dim teta(n) , h(n) , a0(n) , ali(n)
dim an(n,n) , alfag(n) , Ak(n)
'
```

```

' Adatmegadas kovetkezik, elcsavaratlan teglalap szarnyra
'
s=10 ' ez a fesztav
for i=0 to n
  alfag(i)=10*pi/180      : ' ez a geometriai allaszog
  a0(i) =2*pi            : ' ez a felhajtoero-tenyezo iranytangense
  teta(i) =i*pi/n        : ' ez az uj koordinata
next i
for i=0 to n : h(i)=1 : next i
'
' Az egyenletrendszer osszeallitasa kovetkezik
ah=a0(m)*h(m)           : ' a szimmetria-sik jellemzoi
for i=1 to n1           : ' egyutthatok
  for j=1 to n1
    an(i,j)=(1/(h(i)*a0(i))+j/(4*s*sin(teta(i))))*sin(j*teta(i))*ah
  next j
next i
'-----
'   A Fourier egyutthatok meghatarozasa kovetkezik
'   ez tulajdonkeppen az ismertelenek kiszamitasa
'   jelenti.
'-----

```

*A feladat inhomogén, lineáris algebrai egyenlet-rendszer megoldásához vezet, amit a már bemutatott, **Schmidt** féle ortogonalizációs eljárással oldunk meg. A megoldás ismeretében a különböző jellemzők már számíthatók.*

```
call schmidt
```

```

cysz=ah*pi*s/(4*s*h(m))*Ak(1) : cls
print " *****"
print " A szarny atlagos felhajtoero tenyezoje: ";cysz : print
print " Alfai      Dcy/dalf a      cy-helyi      cxi-helyi" : print
suk=0 : sul=0
for j=1 to n1
  sum=0 : sun=0
  for k=1 to n1
    sun=sun+Ak(k)*sin(k*teta(j))
    sum=sum+k*Ak(k)*sin(k*teta(j))/sin(teta(j))
  next k
  ali=ah*sum/4/s      ' ez az indukalt allaszog
  cyh=ah*sum/h(j)    ' ez a helyi felhajtoero tenyezo
  cxih= - ali*cyh    ' ez a helyi indukalt ellenallas
  aj=a0(j)/(1+a0(j)*h(j))*sum/4/s/sun  ' ez a helyi dcy/dalfa
  print using "###.####" ;ali,aj,cyh,cxih
  if (j/2-int(j/2))<0.2 then kk=2 else kk=4
  suk=suk+kk*h(j)*aj*sin(teta(j))
  sul=sul+kk*cxih*h(j)*sin(teta(j))

```

```

next j
print "-----"
print " Az atlagos dcy/dalfa=      ";suk*s*pi/6/n/s/h(m)
print " Az atlagos cxi=          ";sul*pi/6/n

end

```

Itt következik a már jól ismert egyenlerendszer megoldó szubrutin:

```

sub schmidt
shared n , n1 , an() , alfag() , Ak()
local s1 , s2 , s3
dim cw(n,n) , gw(n)
for i=1 to n1
  for j=1 to n1 :cw(i,j)=0 : next j
  gw(i)=0
next i
for i=1 to n1 : cw(1,i)=an(1,i) : next i
gw(1)=alfag(1)

for k=2 to n1
  s3=0
  for i=1 to k-1
    s1=0:s2=0
    for j=1 to n1
      s1=s1+an(k,j)*cw(i,j) : s2=s2+cw(i,j)*cw(i,j)
    next j
    s1=-s1/s2
    for j=1 to n1 : cw(k,j)=cw(k,j)+s1*cw(i,j) : next j
    s3=s3+s1*gw(i)
  next i
  gw(k)=alfag(k)+s3
  for j=1 to n1 : cw(k,j)=cw(k,j)+an(k,j) : next j
next k
for i=1 to n1
  s1=0
  for k=1 to n1 : s1=s1+cw(i,k)*cw(i,k) : next k
  gw(i)=gw(i)/s1
next i
for i=1 to n1
  s1=0
  for j=1 to n1 : s1=s1+gw(j)*cw(j,i) : next j
  Ak(i)=s1
next i
end sub

```

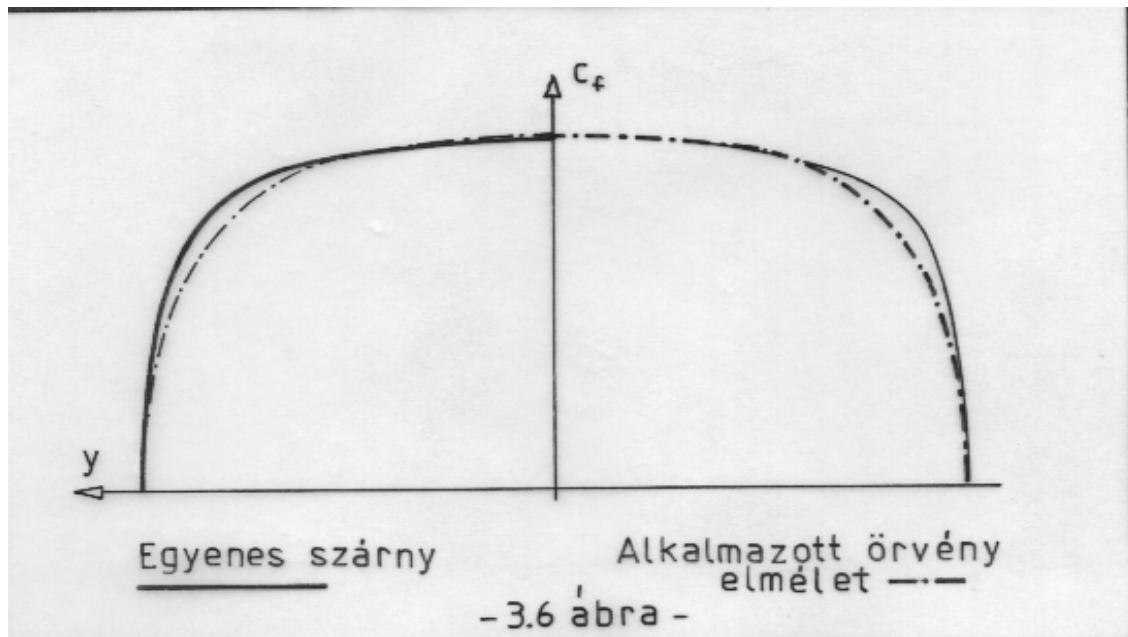
A program futtatási eredményei:

A program bemutatása után egy, a felvett adatokkal elvégzett példaszámítás eredményeit ismertetjük. A konkrét együttható-értékeket nem mutatjuk be itt (azt bárki kiszámíthatja a program futtatásával), csak annyit jegyzünk meg, hogy a páros együtthatók értéke 10^{-9} nagyságrendű, a 15. (legkisebb) együtthatónál is négy nagyságrenddel kisebb. A páros együtthatók tehát valóban nullának vehetők.

Az egész szárnyra vonatkozó eredményeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

A szárny átlagos felhajtóerő-tényezője:	0.88078
A felhajtóerő-tényező átlagos meredeksége:	5.0469
Az átlagos indukált-ellenállás tényező:	0.02688

A 3.6 ábrán a cirkuláció fesztáv menti megoszlását tüntettük fel (ezen az ábrán az "Alkalmazott örvény elmélet"-tel számított eredményeket is ábrázoltuk, azért, hogy a kétféle módszerrel meghatározott felhajtóerő-tényező megoszlás összehasonlítható legyen):

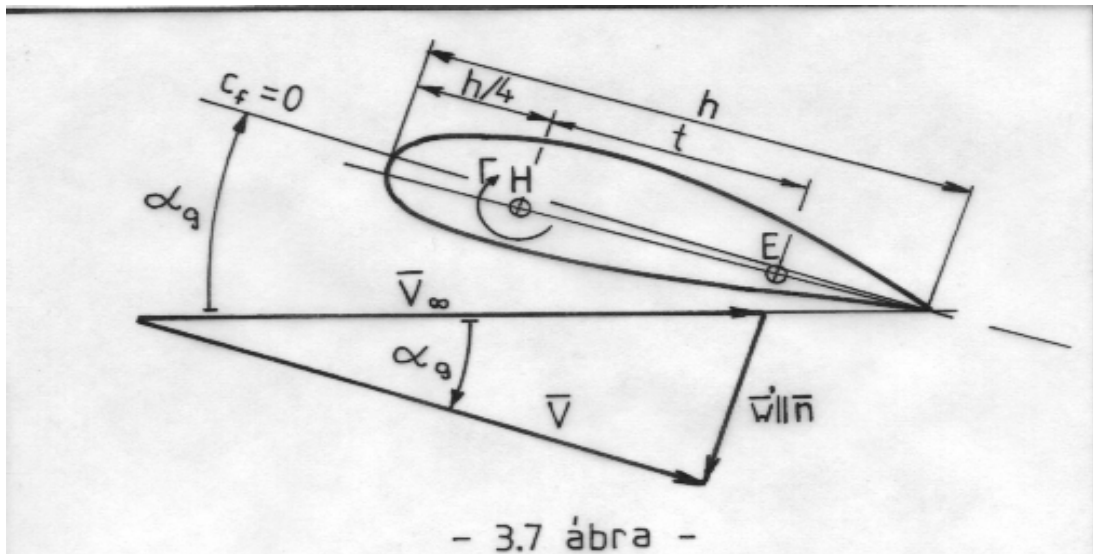


3.3 Általános szárny

Az előző pontban bemutatott eljárást csak nagykarcsúságú, egyenes szárnyakra szabad alkalmazni, ha ez a feltétel nem teljesül, akkor az eredmények messze esnek a valóságtól. Az itt kidolgozandó, lényegében új elméletet **alkalmazott örvény elmélet**-nek nevezzük. Ez az eljárás fejlettebb, mint a szakirodalomban található, e családba tartozó örvény-elméletek és így a véges szárnyak aerodinamikai számításának valóban hatékony módszere lehet. Alapvető korlát azonban az, hogy ha valamilyen, lényeges nemlinearitás létezik, akkor már nem alkalmazható. Megjegyzendő még, hogy napjainkban számos olyan örvény-panel módszer létezik, amely az itt megadott eljárásnál sokkal jobb eredményeket ad. Ezek a módszerek azonban nagyon számítás-igényesek (elsősorban a peremfeltételek kidolgozása igényel sok munkát de nem hanyagolható el a szükséges gépkapacitás sem). Végeredményben, az előzetes aerodinamikai számítási eljárások közül, amelyek személyi számítógépre is alkalmazhatók, ajánljuk az itt bemutatandó eljárást.

Már a 30-as években elkezdték a **Prandtl** féle szárnyelmélet továbbfejlesztését. Kiemelkedik ezek közül **Weissinger** munkája, aki kis karcsúságú, erősen nyilazott szárnyra is érvényes elméletet dolgozott ki. Ennek a módszernek is lényeges korlátja azonban az a feltétel, ami szerint a szárnynak egy síkban kell lennie (lásd 3.3 ábra, x-y sík). A következőkben bemutatandó módszer egyetlen korlátja, hogy a modell minden vonatkozásban **lineáris**, ezen túl azonban nagyon széles körben alkalmazható (megfelelő feltételekkel pl. több szárny együttműködésének vizsgálatára is alkalmas). Az eljárás alapja a **Biot-Savart** törvény, illetve a **Weissinger** elmélet néhány alapfeltétele:

- a hordozó örvényeket a szárny-húr első negyedére eső pontba helyezük el (3.7 ábra);
- azt mondjuk, hogy az ellenőrző pontban (" E " pont, 3.7 ábra) az áramlás a szárny-profilhoz simul, azaz pont akkora a szárnyra merőleges indukált sebesség összetevő (\vec{w}'), hogy itt éppen a geometriai állásszög alakuljon ki;
- az ellenőrző pontot - egy későbbi részletszámításban bemutatott módon - a profil felhajtóerő-tényező meredekségének megfelelő távolságban (t) helyezzük el.



A fentiekben, illetve a korábbiakban leírtak alapján tehát egy hordozó-leúszó örvény rendszert veszünk fel, amelyet elvileg az indulási örvény zár be, bár ezzel itt sem számolunk. A hordozó örvényeket a szárny húr-negyed pontjaiban vesszük fel ("H" pontok, a 3.7 illetve a 3.8 ábrán). A leúszó örvények - amelyek intenzitását a **Kelvin** tétel szerint határozzuk meg - az "A" pontokból indulnak (3.8 ábra).

Vizsgáljuk meg először az ellenőrző pontok helyét. Ezek, a 3.7 ábra szerint a hordozó pont mögött, a húr vonalon "t" távolságban helyezkednek el. E távolság meghatározása érdekében kövessük az itt bemutatott eljárást:

$$\alpha_g \approx \frac{\hat{w}}{V_\infty} ; \quad \text{és} \quad c_f = a \alpha_g ; \quad \text{innen:} \quad \frac{c_f}{a} = \frac{\hat{w}}{V_\infty} .$$

Másrészt, alkalmazva a **Kutta-Zsukovszkij** tételt (2.5 összefüggés) a cirkulációból kiszámíthatjuk a felhajtóerő-tényezőt:

$$c_f = \frac{2\Gamma}{V_\infty h} ; \quad \text{így:} \quad \hat{w} = \frac{2\Gamma}{ah} .$$

A 3. fejezet 3.1 pontjában kiszámítottuk egy végtelen hosszú, egyenes örvény-fonal által indukált sebességet:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi t} ; \quad \text{a kétféle indukált sebességet egyenlővé téve (} w = \hat{w} \text{) kapjuk, hogy:}$$

$$t = \frac{ah}{4\pi} ; \quad (3.19)$$

Ez a távolság - természetesen - több szempontból is közelítés, de a gyakorlati alkalmazások, illetve ezek ellenőrzése igazolta e közelítések jogosságát. A potenciálmélet tanítása szerint a sík lap felhajtóerő-tényezőjének meredeksége 2π , ha ezt az értéket (3.19)-be beírjuk, akkor a $t = h/2$ eredményt kapjuk, azaz ebben az esetben az ellenőrző pont a húr három-negyedén helyezkedik el. Más esetben az aktuális meredekséget kell beírni és azzal a "t" távolság értéke meghatározható.

A következőkben az indukált sebesség számításával foglalkozunk. Ezt a **Biot-Savart** törvény alapján (3.1) tesszük. A valóságos örvények szerkezete a potenciális örvények szerkezetétől alapvetően két tényezőben tér el:

- az örvénynek két része van, a külső rész sebesség-eloszlása jól egyezik a potenciális örvény sebesség-eloszlásával, az un. "örvény-mag"-ban viszont ettől teljesen eltér - további növekedés helyett éppen csökken, illetve nullához tart;
- az örvény intenzitása a viszkozitás miatt az időben (és ezzel a keletkezés helyétől távolodva) csökken - ezt nevezzük örvény öregedésnek.

A következő számításokban nem alkalmazzuk, csak bemutatjuk a **Lamb** féle örvény-modellt; [4] alapján írható:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - e^{-\lambda r^2}\right);$$

ahol: $\lambda = \lambda(t, \nu)$, függvénye az időnek és a viszkozitásnak.

Ez a modell behelyettesíthető a **Biot-Savart** törvénybe, ahol az idő helyett a leúszó örvény szárnytól mért távolságát kell - a repülési sebesség felhasználásával - beírni. A modell alkalmazása nélkül a felcsavarodási folyamat nem számítható. A későbbiekben azért mégis bemutatunk egy közelítő eljárást az örvény-felcsavarodás becslésére, mivel a korrekt számítás sok problémát okoz és rendkívül időigényes is.

A **Biot-Savart** törvényt (3.1) itt kissé más formában írjuk fel:

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{4\pi} \int_{(s)} \Gamma(s) \frac{d\bar{\mathbf{s}} \times \bar{\mathbf{r}}}{r^3}; \quad (3.20)$$

Az integrálon belül elhelyezkedő, változó cirkuláció - amely a pl. hely függvénye is lehet - megengedi e törvény (3.1)-nél általánosabb alkalmazását, pl. így vehető figyelembe a hordozó örvény hatása, hiszen a hordozó örvény intenzitása az örvény-fonal mentén (s) változik. Ez a forma szükséges az esetleges örvény-öregedés illetve az egyéb hatások figyelembe vételéhez is.

A vizsgálataink kiindulópontját a 3.8 ábrán mutatjuk be. A geometriai viszonyokat meghatározzák az "E", "A" és a "H" pontok valamint a szárny húrhossz eloszlása. A pontokat 0-tól 2n-ig sorszámozzuk (n a szimmetria-síkot jelölő index); a konkrét számításokhoz meg kell adni a fent megnevezett pontok koordinátáit:

az ellenőrző pontok: $E(xe_i, ye_i, ze_i) \Rightarrow E_i$, ahol $i = 1, 2, \dots, 2n-1$;

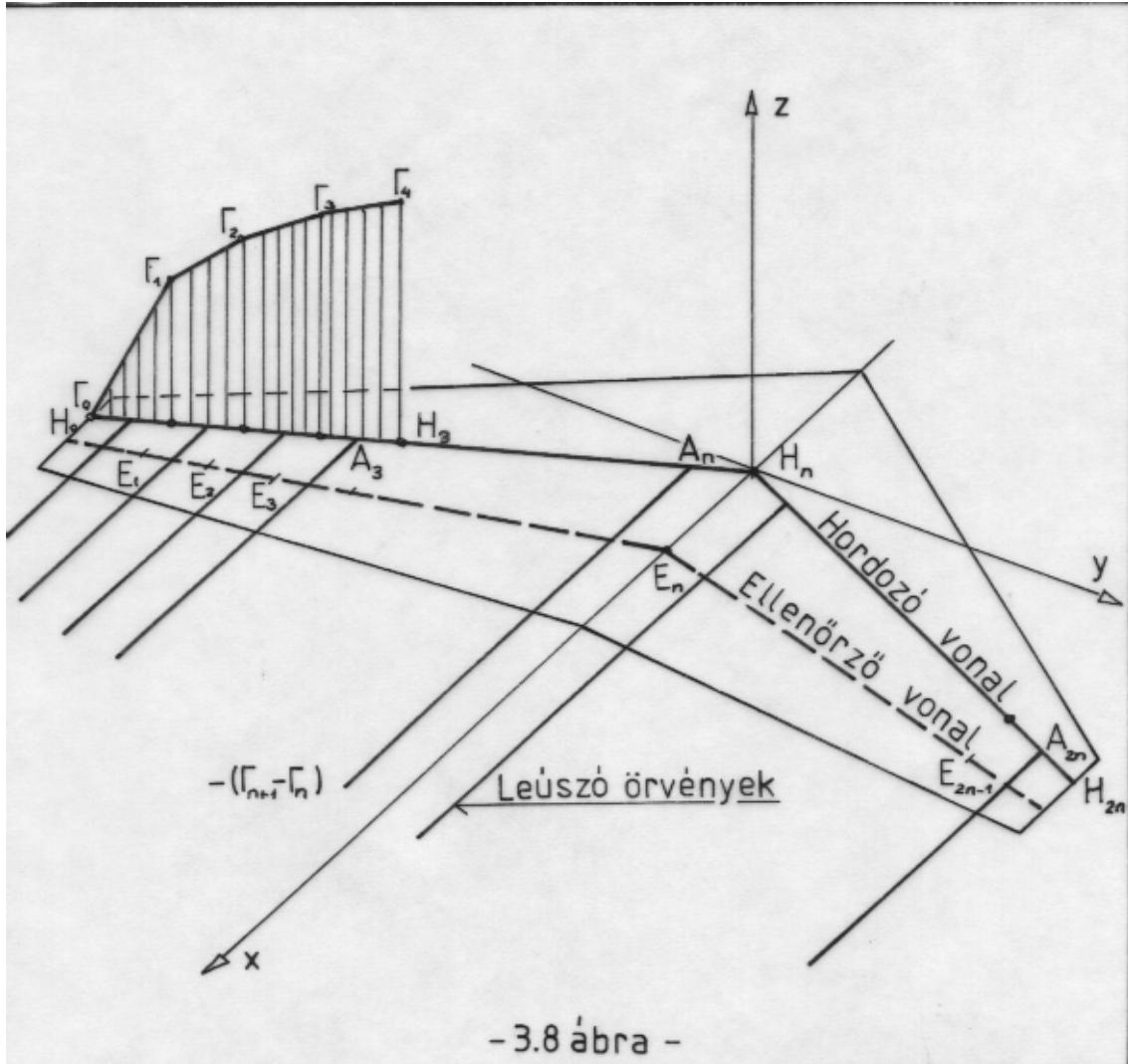
a hordozó pontok: $H(xh_i, yh_i, zh_i) \Rightarrow H_i$, ahol $i = 1, 2, \dots, 2n$;

és a leúszó örvények indulási pontjai:

$$A(xa_i, ya_i, za_i) \Rightarrow A_i, \text{ ahol } i = 1, 2, \dots, 2n.$$

A geometriai viszonyokhoz tartozik még a leúszó örvények pályája is, ezt itt az "x" tengellyel párhuzamos egyenesnek vesszük, így ezek a pontok - az "A" pontok ismeretében - egyértelműen megadhatók.

A hordozó vonal felett - amit a "H" pontok jelölnek ki lineáris cirkuláció-megoszlást veszünk fel, azaz egy-egy hordozó pontban a pont indexének megfelelő, konkrét Γ értéket találunk.



A megoszló hordozó örvényekből, a hordozó-pontok által kijelölt szakasz közepén indulnak a leúszó örvények. Ez egyúttal az " A " pontok koordinátáinak kiszámítási módját is meghatározza. A leúszó örvény-fonalak intenzitása, a **Kelvin** tételnek megfelelően:

$$-(\Gamma_{n+1} - \Gamma_n) .$$

A számításhoz szükséges még a geometriai állásszög-eloszlás és az egyes profilokat jellemző felhajtóerő-tényező meredekség. A sebesség értéke - ideális folyadékot feltételezve - szabadon választható.

3.3.1 A hordozó-örvény által indukált sebesség

A hordozó-vonal felett lineárisan változó cirkulációt a következő képlettel írhatjuk le (megjegyezzük, hogy ez a forma nagyon hasonlít az örvény-panel módszernél alkalmazott örvény-eloszlás kifejezéshez):

$$\Gamma = \Gamma_{j-1} + \frac{\Gamma_j - \Gamma_{j-1}}{S_j} \xi = \Gamma_j \frac{\xi}{S_j} + \Gamma_{j-1} \left(1 - \frac{\xi}{S_j} \right); \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \quad (3.21)$$

$$\text{ahol: } S_j = \sqrt{(xh_j - xh_{j-1})^2 + (yh_j - yh_{j-1})^2 + (zh_j - zh_{j-1})^2}; \quad \text{és} \quad 0 \leq \xi \leq S_j .$$

A számításban szükséges az $\bar{\mathbf{r}}$ helyvektor, ami a $d\bar{\mathbf{s}}$ ívelem-vektor felezőpontjából az E_i , i -edik ellenőrző pontba mutat. Az ellenőrző pontok koordinátáit egyébként, a korábbiakban mondottak szerint a hordozópontok koordinátái és (3.19) alapján számíthatjuk ki:

$$x_{e_j} = xh_j + \frac{a_j h_j}{4\pi};$$

$$y_{e_j} = yh_j \quad \text{és} \quad z_{e_j} = zh_j; \quad (j=0, 1, 2, \dots, 2n).$$

A nulladik és a $2n$ -edik ellenőrző pont csak a segédszámításokhoz (normálvektor számítás) szükséges. Az ellenőrző pont koordinátái után az $F = F(x, y, z)$ futó pontot kell megadni, amely a $H_{j-1} H_j$ szakaszon, a kezdő és a végpont között mozog:

$$\begin{aligned} x &= xh_{j-1} + \frac{xh_j - xh_{j-1}}{S_j} \xi; \\ y &= yh_{j-1} + \frac{yh_j - yh_{j-1}}{S_j} \xi; \\ z &= zh_{j-1} + \frac{zh_j - zh_{j-1}}{S_j} \xi; \quad \text{ahol: } 0 \leq \xi \leq S_j . \end{aligned} \quad (3.22)$$

ezzel:

$$\bar{\mathbf{r}}_i = FE_i = \begin{bmatrix} xe_i - x \\ ye_i - y \\ ze_i - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx_i \\ ry_i \\ rz_i \end{bmatrix}; \quad \text{illetve: } |\bar{\mathbf{r}}_i| = r_i = \sqrt{rx_i^2 + ry_i^2 + rz_i^2}$$

A helyvektort az ívelem-vektorral ($d\bar{s}$) vektoriálisan kell szorozni. Ehhez meg kell határozni a $H_{j-1}H_j$ szakasz irányvektorát:

$$\bar{v}_j = \frac{1}{S_j} \begin{bmatrix} xh_j - xh_{j-1} \\ yh_j - yh_{j-1} \\ zh_j - zh_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vx_j \\ vy_j \\ vz_j \end{bmatrix}; \text{ ez egységvektor, tehát: } d\bar{s}_j = \bar{v}_j ds.$$

Határozzuk meg a $d\bar{s}_j \times \bar{r}_i$ vektori szorzatot:

$$\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ vx_j & vy_j & vz_j \\ rx_i & ry_i & rz_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vy_j rz_i - vz_j ry_i \\ vz_j rx_i - vx_j rz_i \\ vx_j ry_i - vy_j rx_i \end{bmatrix};$$

Helyettesítsük be ezt a **Biot-Savart** törvénybe (3.20), akkor megkapjuk a j-edik hordozóvonal-szakaszon elhelyezkedő cirkuláció által indukált sebesség vektort az i-edik ellenőrző pontban :

$$\bar{w}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{s_j} \begin{bmatrix} vy_j rz_i - vz_j ry_i \\ vz_j rx_i - vx_j rz_i \\ vx_j ry_i - vy_j rx_i \end{bmatrix} \Gamma(s) \frac{1}{r_i^3} ds.$$

A fenti integrált numerikusan számítjuk ki. Ez azt jelenti, hogy a $H_{j-1}H_j$ szakaszt (np) részre osztjuk és az integrált véges összeggel közelítjük:

$$\bar{w}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^{np} \begin{bmatrix} vy_j rz_{il} - vz_j ry_{il} \\ vz_j rx_{il} - vx_j rz_{il} \\ vx_j ry_{il} - vy_j rx_{il} \end{bmatrix} \Gamma_l \frac{1}{r_{il}^3} \right\} \Delta s; \quad (3.23)$$

ahol: $\Delta s = S_j / np$.

A cirkuláció eloszlás (3.21) szerinti kifejezésének egyszerűsítése érdekében vezessük be a következő, egyszerűsítő jelöléseket (felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezek, a tömörebb felírást lehetővé tevő mennyiségek vektorok):

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^{np} \begin{bmatrix} vy_j rz_{il} - vz_j ry_{il} \\ vz_j rx_{il} - vx_j rz_{il} \\ vx_j ry_{il} - vy_j rx_{il} \end{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{S_j} \right) \frac{1}{r_{il}^3} \right\} \Delta s;$$

és

$$\bar{b}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^{np} \begin{bmatrix} vy_j rz_{il} - vz_j ry_{il} \\ vz_j rx_{il} - vx_j rz_{il} \\ vx_j ry_{il} - vy_j rx_{il} \end{bmatrix} \frac{\xi}{S_j} \frac{1}{r_{il}^3} \right\} \Delta s.$$

Ezzel az indukált sebesség vektor a következő összefüggésből számítható:

$$\bar{\mathbf{w}}_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_{ij} \Gamma_{j-1} + \bar{\mathbf{b}}_{ij} \Gamma_j ; \quad (3.24)$$

Ezzel a j-edik hordozó-örvény szakasz i-edik ellenőrző pontban indukált sebességét kiszámítottuk. Ez természetesen egy vektor-mennyiség, számunkra a szárnyfelületre merőleges összetevő az érdekes. Ezt az indukált sebesség és az E_i pontbeli normálvektor skaláris szorzásával határozhatjuk meg. Ehhez ki kell számítanunk a szóban forgó normálvektort. Határozzuk meg először az E_i ellenőrző pontbeli érintőt. Első lépésként definiáljunk az ellenőrző pontok között felező pontokat:

$$xb_i = (x_{e_i} - x_{e_{i-1}}) / 2 ; \quad yb_i = (y_{e_i} - y_{e_{i-1}}) / 2 \quad \text{és} \quad zb_i = (z_{e_i} - z_{e_{i-1}}) / 2 ;$$

ahol: $i=1,2,3,\dots,2n$.

Számítsuk ki az (i-1)-edik és az i-edik ellenőrző pont közötti egység vektort:

$$ex_i = (xb_{i+1} - xb_i) / Sb_i ;$$

$$ey_i = (yb_{i+1} - yb_i) / Sb_i ; \quad \text{ezzel:} \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} ex_i \\ ey_i \\ ez_i \end{bmatrix} ;$$

$$ez_i = (zb_{i+1} - zb_i) / Sb_i ; \quad \text{ahol:} \quad Sb_i = \sqrt{(xb_{i+1} - xb_i)^2 + (yb_{i+1} - yb_i)^2 + (zb_{i+1} - zb_i)^2}$$

Számoljuk ki továbbá az $E_i H_i$ vektort:

$$E_i H_i = \begin{bmatrix} (xh_i - xe_i) / Seh_i \\ (yh_i - ye_i) / Seh_i \\ (zh_i - ze_i) / Seh_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lx_i \\ ly_i \\ lz_i \end{bmatrix} ;$$

$$\text{ahol:} \quad Seh_i = \sqrt{(xh_i - xe_i)^2 + (yh_i - ye_i)^2 + (zh_i - ze_i)^2}$$

E két vektor vektori szorzataként kiszámítható az i-edik ellenőrző pontbeli normálvektor:

$$\bar{\mathbf{m}}_i = E_i H_i \times \bar{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} ly_i ez_i - lz_i ey_i \\ lz_i ex_i - lx_i ez_i \\ lx_i ey_i - ly_i ex_i \end{bmatrix} ; \quad (3.25)$$

A keresett skalár-szorzat:

$$w_{ij} = \bar{\mathbf{w}}_{ij}^T \bar{\mathbf{m}}_i = a_{ij} \Gamma_{j-1} + b_{ij} \Gamma_j ; \quad (3.26)$$

$$\text{ahol:} \quad a_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_{ij}^T \bar{\mathbf{m}}_i ; \quad \text{és} \quad b_{ij} = \bar{\mathbf{b}}_{ij}^T \bar{\mathbf{m}}_i .$$

3.3.2 A leúszó örvények sebesség indukciója

A leúszó örvények induló pontjai az " A " pontok (3.8 ábra), ezek az egyes, hordozópontok által kijelölt szakaszok felezőpontjai, azaz:

$$\begin{aligned} xa_j &= (xh_j + xh_{j-1}) / 2 ; \\ ya_j &= (yh_j + yh_{j-1}) / 2 ; \quad \text{azaz:} \quad A_j = A_j (xa_j, ya_j, za_j) \\ za_j &= (zh_j + zh_{j-1}) / 2 . \end{aligned}$$

A számítás megköveteli a leúszó örvényfonalak kijelölését. Jelöljük a j-edik örvényfonal (a H_{j-1} és a H_j közötti szakasz felezőpontjából indul) k-adik pontját a következő módon:

$$O_{jk} = O_{jk}(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk});$$

ahol az egyes koordinátákat a következő módon számíthatjuk

$$\begin{aligned} x_{jk} &= xa_j + k \Delta x_k , \\ y_{jk} &= ya_j + k \Delta y_k , \\ z_{jk} &= za_j + k \Delta z_k . \end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy Δx_k , Δy_k és Δz_k az általunk előírt módon változhat. Ez azt jelenti, hogy így lehet pl. az örvény-felcsavarodást figyelembe venni. Jelen esetben válasszuk $\Delta x_k = \Delta x$, állandó értéket, illetve a $\Delta y_k = \Delta z_k = 0 - t \quad \forall k - ra$. Kijelöljük az egyes örvényfonal-szakaszok irányvektorait:

$$\bar{\mathbf{l}}_{jk} = \frac{1}{l_{jk}} \begin{bmatrix} x_{jk} - x_{jk-1} \\ y_{jk} - y_{jk-1} \\ z_{jk} - z_{jk-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lx_{jk} \\ ly_{jk} \\ lz_{jk} \end{bmatrix};$$

ahol a szakasz hossza:

$$l_{jk} = \sqrt{(x_{jk} - x_{jk-1})^2 + (y_{jk} - y_{jk-1})^2 + (z_{jk} - z_{jk-1})^2} .$$

A **Biot-Savart** törvény alkalmazásához szükséges a leúszó örvényen futó pontból (F_{jk}) az i-edik ellenőrző pontba mutató vektor:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij} = F_{jk} \mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} xe_i - x \\ ye_i - y \\ ze_i - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{bmatrix}; \quad (3.27)$$

Itt az x , y és z a j -edik örvény-fonalon futó pont koordinátái, melyeket az egyszerűség és a mellékletben bemutatott programmal való összehasonlíthatóság miatt index nélkül adtunk meg. Ezzel a j -edik leúszó örvény-fonal i -edik ellenőrző pontbeli indukciója számítható:

$$\bar{\mathbf{w}}_{ij}^* = -\frac{\Delta s}{4\pi} (\Gamma_j - \Gamma_{j-1}) \sum_{k=1}^{nl} \left\{ \begin{bmatrix} ly_{jk} rz - lz_{jk} ry \\ lz_{jk} rx - lx_{jk} rz \\ lx_{jk} ry - ly_{jk} rx \end{bmatrix} \frac{1}{r_{ij}^3} \right\}; \quad (3.28)$$

Ismét a felületre merőleges összetevőt kell meghatározni, amit a normálvektorral vett skalárszorzat segítségével határozhatunk meg:

$$w_{ij}^* = \bar{\mathbf{w}}_{ij}^{*T} \bar{\mathbf{m}}_i = c_{ij} (\Gamma_j - \Gamma_{j-1}); \quad \text{ahol: } c_{ij} = \bar{\mathbf{c}}_{ij}^T \bar{\mathbf{m}}_i;$$

$$\text{és: } \bar{\mathbf{c}}_{ij} = -\frac{\Delta s}{4\pi} \sum_{k=1}^{nl} \left\{ \begin{bmatrix} ly_{jk} rz - lz_{jk} ry \\ lz_{jk} rx - lx_{jk} rz \\ lx_{jk} ry - ly_{jk} rx \end{bmatrix} \frac{1}{r_{ij}^3} \right\}. \quad (3.29)$$

3.3.3 Az együtttható mátrix összeállítása és az indukált ellenállás számítása

A bevezetőben mondottak szerint a számítás alapegyenlete ("az áramlás az E pontban a szárnyhoz simul - 3.7 ábra):

$$\alpha_{gi} = -\frac{1}{V_\infty} \sum_{j=1}^{2n} (w_{ij} + w_{ij}^*); \quad (3.30)$$

(3.26) és (3.29) figyelembe vételével írható következő összefüggés:

$$a_{ij} \Gamma_{j-1} + b_{ij} \Gamma_j + c_{ij} \Gamma_j - c_{ij} \Gamma_{j-1} = -V \alpha_{gi};$$

Ez egy inhomogén, lineáris egyenletrendszer, amelynek együtttható-mátrixát a következő formában írhatjuk fel:

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,2n-1} \\ \vdots & d_{ij} & \vdots \\ d_{2n-1,1} & \cdots & d_{2n-1,2n-1} \end{bmatrix}; \quad \text{ahol: } d_{ij} = a_{i+1,j} + b_{ij} + c_{ij} - c_{i+1,j}$$

Ezzel az egyenlet-rendszer a következő alakot ölti:

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} \bar{\Gamma} = \bar{\mathbf{w}}_g; \quad (3.31)$$

$$\text{ahol: } \bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_{2n-1} \end{bmatrix} \quad \text{és: } \bar{\mathbf{w}}_g = \begin{bmatrix} w_{g1} \\ \vdots \\ w_{g,2n-1} \end{bmatrix} ;$$

illetve: $w_{gi} = -V\alpha_{gi}$ - ez az előírt indukált sebesség, aminek létre kell jönnie.

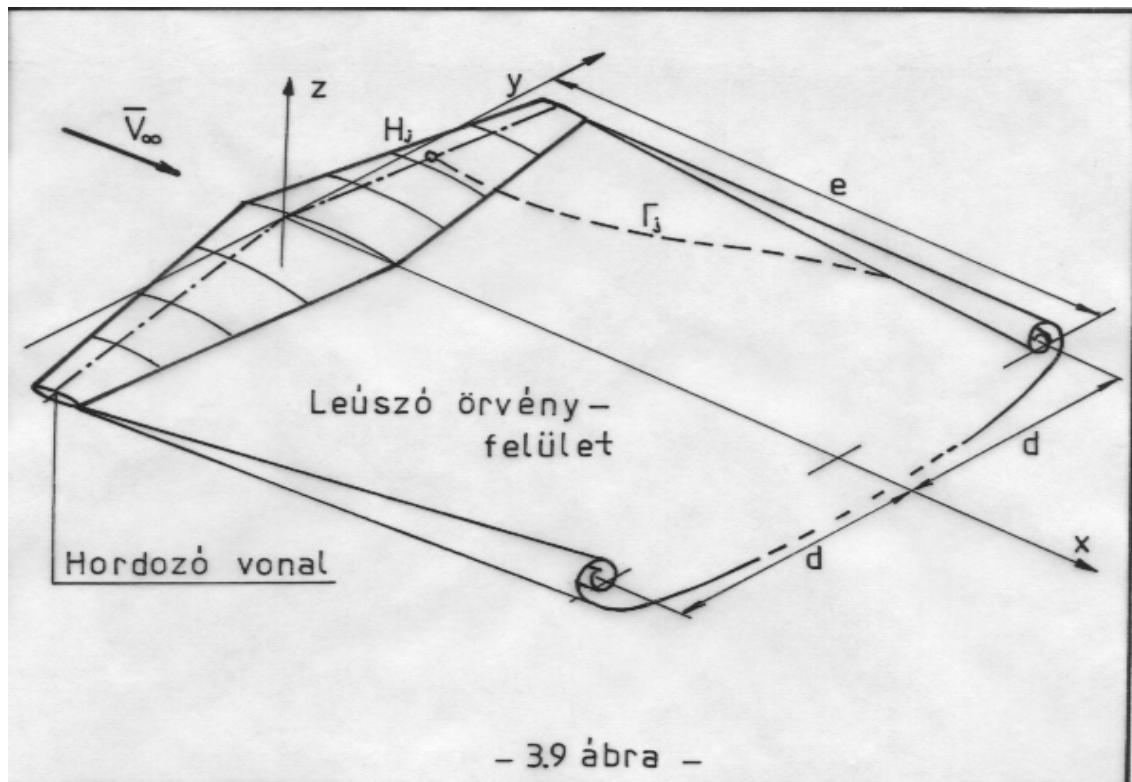
Az indukált ellenállás, amint azt már említettük - **Munk** tétele szerint - a leúszó örvények hatásának tulajdonítható, így azt a megfelelő indukált sebesség-összetevő alapján kell számítani. Az előző ponthoz hasonlóan, itt is szükséges a negatív előjel:

$$c_{ei} = -\frac{w^*}{V_\infty} c_f = -\frac{w^*}{V_\infty} \frac{2\Gamma}{V_\infty h} ; \quad (3.32)$$

3.3.4 Az örvényfelcsavarodás vizsgálata

Amint azt már említettük, az örvényfelcsavarodás számítása elvileg - megfelelő örvénymodell alkalmazása esetén - lehetséges, a gyakorlati számítás azonban hosszadalmas és az eredmény nem egy "vonal", hanem egy tartomány amin belül a leúszó örvények kaotikus mozgást végeznek. Ez egyrészt ugyan jól közelíti a valóságos helyzetet, másrészt azonban nem könnyű számolni vele.

Itt egy közelítő modellt mutatunk be, amely az örvény-felcsavarodást néhány tényező függvényében vizsgálja. A felcsavarodó örvény-síkot a 3.9 ábrán tüntettük fel.



A felcsavarodás során előálló örvény-magok távolsága:

$$2d = \frac{c_{f\ sz} A}{c_{f n} h_n} ;$$

ahol: $c_{f\ sz}$ - a teljes szárny felhajtóerő tényezője;

A - a szárny felülete;

$c_{f n}$ - a felhajtóerő-tényező a szimmetria síkban;

h_n - a húrhossz a szimmetria síkban.

A felcsavarodás másik fontos jellemzője a felcsavarodási hossz (szintén a 3.9 ábra jelöléseivel):

$$\frac{e}{h_n} = \frac{K}{c_{f\ sz}} ; \text{ ahol: } K=0.0357+0.354\lambda+0.0643\lambda^2 ,$$

λ pedig a szárny karcsúsága.

Feltételezzük, hogy az örvény-sík a "z" tengely irányába nem mozdul el. Ezzel egy gyors, viszonylag pontos eljárás áll a rendelkezésünkre. Meg kell határozni az örvény-pályákat és ezek ismeretében a Δx_k , Δy_k és a Δz_k értékeket. Ehhez szükséges a teljes szárny felhajtóerő-tényezője és a szimmetria síkbeli felhajtóerő-tényező értéke is. Ez azt jelenti, hogy az így definiált eljárás néhány iterációs lépést tesz szükségessé, azaz először egyenes leúszó örvénnyel számolunk. Utána meghatározunk egy felcsavarodási módot, kiszámítjuk az új tényezőket, amiből a következő felcsavarodási mód számítható. Az eredmény elfogadható, ha két lépés között a különbség elegendően kicsi.

Ezeket a felcsavarodási számításokat a mellékelt program nem tartalmazza.

3.2 Melléklet

ALKALMAZOTT ÖRVÉNY ELMÉLET (Számítógép-program)

Az itt bemutatandó program-listára ugyanazok a megjegyzések vonatkoznak, mint a korábbiakban bemutatott programokra. A program TURBO BASIC nyelven íródott, és a legtöbb vonatkozásában megfelel az elméleti részben leírtaknak. Eltérés csak egészen kivételesen, az eljárás lényegét nem érintő helyen lehet. A program második sorában megadjuk az n értékét ($n=16$) - ez azt jelenti, hogy a szárny felett 15 helyen határozzuk meg a cirkuláció értékét.

rem Nyialzott szarnyon keletkezo felhajtoero szamitasa

n=16 : n1=n-1 : m=10 : szam=67 : pi=3.14159265358 : cls

```
dim xh(n),yh(n),zh(n),xa(n),ya(n),za(n),xe(n),ye(n),ze(n)
dim x(n,m),y(n,m),z(n,m),xf(n,m),yf(n,m),zf(n,m),g(n1)
dim am(n,n),bm(n,n),cm(n,n),gm(n),vx(n),vy(n),vz(n),s(n)
dim mx(n),my(n),mz(n),alfag(n1),w(n),ct(n1,n1),c(n1,n1)
dim ali(n),cf(n),cei(n),afel(n),mfel(n)
dim h(n),a(n),xee(n),yee(n),zee(n)
```

A repülési sebességet 10 m/s-ra választottuk, ez szabadon megtehető, nincs különösebb jelentősége. A levegő sűrűsége 1.2 kg/m³, a geometriai állásszög végig állandó, 10 fok. A fesztáv 10 méter és a húr hossz szintén állandó (1 méter), a felhajtóerő-tényező meredeksége pedig 2π . Ezzel ugyanolyan szárnyat definiáltunk, mint az előző számításban (3.1 melléklet).

```
vr=10 : ro=1.2
for i=1 to n1 : w(i)=-1.76328 : alfag(i)=-atn(w(i)/vr) : next i
for i=0 to n : xh(i)=0 : next i
for i=0 to n : yh(i)=-5+i*5/8 : next i
for i=0 to n : zh(i)=0 : next i
for i=0 to n : h(i)=1 : a(i)=2*pi : next i
```

Itt kezdődik a különféle pontok definiálása.

```
for i=0 to n
  xe(i)=xh(i)+h(i)*a(i)/4/pi
  ye(i)=yh(i) : ze(i)=zh(i)
next i
for i=1 to n
  xa(i)=(xh(i)+xh(i-1))/2 : xee(i)=(xe(i)+xe(i-1))/2
  ya(i)=(yh(i)+yh(i-1))/2 : yee(i)=(ye(i)+ye(i-1))/2
  za(i)=(zh(i)+zh(i-1))/2 : zee(i)=(ze(i)+ze(i-1))/2
next i
```

```

for i=1 to n
  vx=xh(i)-xh(i-1) : vy=yh(i)-yh(i-1) : vz=zh(i)-zh(i-1)
  s(i)=sqr(vx^2+vy^2+vz^2)
  vx(i)=vx/s(i) : vy(i)=vy/s(i) : vz(i)=vz/s(i)
next i
rem   A normal-vektorok:
for i=1 to n
  wx=xa(i)-xee(i) : wy=ya(i)-yee(i) : wz=za(i)-zee(i)
  mx=vy(i)*wz-vz(i)*wy
  my=vz(i)*wx-vx(i)*wz
  mz=vx(i)*wy-vy(i)*wx
  mh=sqr(mx*mx+my*my+mz*mz)
  mx(i)=mx/mh : my(i)=my/mh : mz(i)=mz/mh
next i
screen 11 : window (-6,-1)-(6,5)
for i=0 to n
  pset (yh(i),zh(i)) : if i<>0 then pset(ya(i),za(i))
next i
for i=1 to n
  line (ya(i),za(i))-(ya(i)+my(i),za(i)+mz(i))
next i

```

Itt határozzuk meg a hordozó örvénnyel kapcsolatos mennyiségeket.

```

for i=1 to n
  rem   Az "i" a szakasz számát jelenti
  lx=(xh(i)-xh(i-1))/s(i) : ly=(yh(i)-yh(i-1))/s(i)
  lz=(zh(i)-zh(i-1))/s(i)
  for j=1 to n1
    sax=0 : say=0 : saz=0 : lep=s(i)/szam
    sbx=0 : sby=0 : sbz=0
    for s=0 to s(i) step lep
      x=xh(i-1)+lx*s : y=yh(i-1)+ly*s : z=zh(i-1)+lz*s
      rx=xe(j)-x : ry=ye(j)-y : rz=ze(j)-z
      r=sqr(rx*rx+ry*ry+rz*rz) : rk=r*r*r
      pset (y,z)
      dsrx=vy(i)*rz-vz(i)*ry : dsry=vz(i)*rx-vx(i)*rz
      dsrz=vx(i)*ry-vy(i)*rx
      sax=sax+dsrx*(1-s/s(i))/rk
      say=say+dsry*(1-s/s(i))/rk
      saz=saz+dsrz*(1-s/s(i))/rk
      sbx=sbx+dsrx*s/s(i)/rk : sby=sby+dsry*s/s(i)/rk
      sbz=sbz+dsrz*s/s(i)/rk
      aij=sax*mx(i)+say*my(i)+saz*mz(i)
      bij=sbx*mx(i)+sby*my(i)+sbz*mz(i)
    next s
  next i

```

```

    am(i,j)=lep*aij/4/pi : bm(i,j)=lep*bij/4/pi
  next j
next i
Itt határozzuk meg a leúszó örvénnyel kapcsolatos mennyiségeket.

wa=0 : for i=1 to n1 : wa=wa+w(i) : next i : wa=wa/n1
for i=0 to n : x(i,0)=xa(i) : y(i,0)=ya(i) : z(i,0)=za(i) : next i
dyk=0 : dzk=0
for i=1 to n
  dxk=(h(i)+h(i-1))/10 : dyk=0 : dzk=0
  for k=1 to m
    x(i,k)=x(i,k-1)+dxk : y(i,k)=y(i,k-1)+dyk : z(i,k)=z(i,k-1)+dzk
    if x(i,k)>(xa(i)+3*h(i)/4) then dxk=1.2*dxk : dzk=-wa*dxk/vr
  next k
next i

for i=1 to n
  for j=1 to n1
    scx=0 : scy=0 : scz=0
    for k=1 to m
      lx=(x(i,k)-x(i,k-1))
      ly=(y(i,k)-y(i,k-1))
      lz=(z(i,k)-z(i,k-1))
      lik=sqr(lx*lx+ly*ly+lz*lz) : lx=lx/lik : ly=ly/lik : lz=lz/lik
      qx=0 : qy=0 : qz=0 : lep=lik/szam
      for l=0 to lik step lep
        x=x(i,k-1)+lx*l : y=y(i,k-1)+ly*l : z=z(i,k-1)+lz*l
        rx=xe(j)-x : ry=ye(j)-y : rz=ze(j)-z
        r=sqr(rx*rx+ry*ry+rz*rz) : rk=r*r*r
        qx=qx+(ly*rz-ry*lz)/rk
        qy=qy+(lz*rx-rz*lx)/rk
        qz=qz+(lx*ry-rx*ly)/rk
      next l
      scx=scx+lep*qx : scy=scy+lep*qy : scz=scz+lep*qz
    next k
    scx=-scx/4/pi : scy=-scy/4/pi : scz=-scz/4/pi
    cm(i,j)=scx*mx(i)+scy*my(i)+scz*mz(i)
  next j
  print "++++ ";i;. ellenorzo pont  +++++"
next i

for i=1 to n1 : for j=1 to n1
  ct(i,j)=am(i+1,j)+bm(i,j)+cm(i,j)-cm(i+1,j)
next j : next i

screen 0

```

A megfelelő számítások elvégzése után az egyenletrendszer megoldása következik. A megoldást az alábbi formában keressük (itt $Ct(i,j)$ az együttható-mátrix, $gm(j)$ az ismeretlenek vektora és $w(i)$ az előírt indukált sebesség):

```

rem                               Ct(i,j)*gm(j)=w(i)
for i=1 to n1 : c(1,i)=ct(1,i) : next i : g(1)=w(1)
for k=2 to n1
  s3=0
  for i=1 to k-1
    s1=0 : s2=0
    for j=1 to n1 : s1=s1+ct(k,j)*c(i,j) : s2=s2+c(i,j)*c(i,j) : next j
    s1=-s1/s2
    for j=1 to n1 : c(k,j)=c(k,j)+s1*c(i,j) : next j
    s3=s3+s1*g(i)
  next i
  g(k)=w(k)+s3
  for j=1 to n1 : c(k,j)=c(k,j)+ct(k,j) : next j
next k
for i=1 to n1
  s1=0
  for k=1 to n1 : s1=s1+c(i,k)*c(i,k) : next k
  g(i)=g(i)/s1
next i
print " A cirkulacio-megoszlas:" : print
for i=1 to n1
  s1=0
  for j=1 to n1 : s1=s1+g(j)*c(j,i) : next j
  gm(i)=s1 : print using "-##.#### " ; i ; gm(i)
next i
print "- - - - -"

```

Ezután a helyi illetve az átlagos jellemzők (indukált sebességek, indukált ellenállás, és a különböző felhajtóerő tényezők meghatározása következik):

```

print " Hely      Elsofaju  Masodfaju  Indukalt    Cf    Cei"
print "          indukalt sebesseg  allaszog"
print
for i=1 to n1
  w1=0 : w2=0
  for j=1 to n1
    w1=w1+(am(i+1,j)+bm(i,j))*gm(j)
    w2=w2+(cm(i,j)-cm(i+1,j))*gm(j)
  next j
  cf(i)=2*gm(i)/(vr*h(i)) : ali(i)=atn(w2/vr) : cei(i)= - cf(i)*ali(i)
  all=ali(i)*180/pi
  print using "-.###^^^ " ;yh(i);w1;w2;all;cf(i);cei(i)
next i

for i=1 to n

```

```

mfel(i)=(yh(i)-yh(i-1))*(h(i-1)+h(i))/2
afel(i)=s(i)*(h(i)+h(i-1))/2
next i

tny=ro*vr*vr/2
fel=0 : cf(0)=0 : cf(n)=0 : cei(0)=0 : cei(n)=0 : indell=0
for i=1 to n
  fel=fel+tny*mfel(i)*(cf(i)+cf(i-1))/2
  indell=indell+tny*afel(i)*(cei(i-1)+cei(i))/2
next i

print : print " * * * * * "
print : print " Az eredo felhajtoero:      "; fel; " [N]"
print " Az ered" indukalt ellenallas:    "; indell; " [N]"
end

```

Számítási eredmények:

A feszítáv menti felhajtóerő-tényező eloszlást a 3.6 ábrán tüntettük fel, nem utolsósorban azért, hogy a kétféle módszerrel számított eredmény összehasonlítható legyen. A további eredményekből az átlagosakat mutatjuk csak be:

A felhajtóerő-tényező egész szárnyra vonatkozó, átlagos meredeksége	4.9492
Az átlagos indukált ellenállás-tényező	0.0265

Ezek az eredmények igen jó közelítéssel megegyeznek a 3.1 mellékletben közölt, hasonló eredményekkel. Ez a számítási eljárás azonban sokkal szélesebb körben alkalmazható, szinte minden szárny vizsgálható vele, ha az áramlás sebessége mérsékelt, azaz nem közelíti meg a hang sebességét.

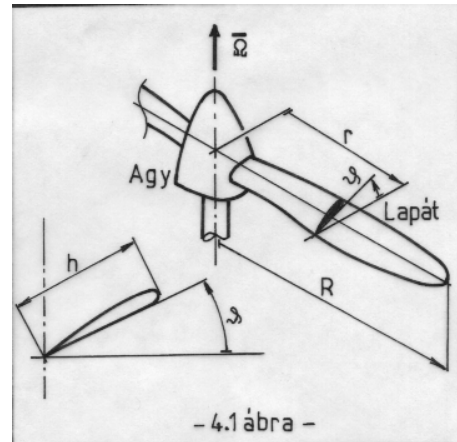
4. A LÉGCSAVAR

A légcsvavar vonó vagy tolóerő létrehozására szolgáló szerkezet. Propulziós elven működik, azaz a forgássíkján áthaladó levegő áramot felgyorsítja; a gyorsítással járó mozgásmennyiség időegységre eső növekedéséből származó reakció erő a légcsvavaron keletkező erő.

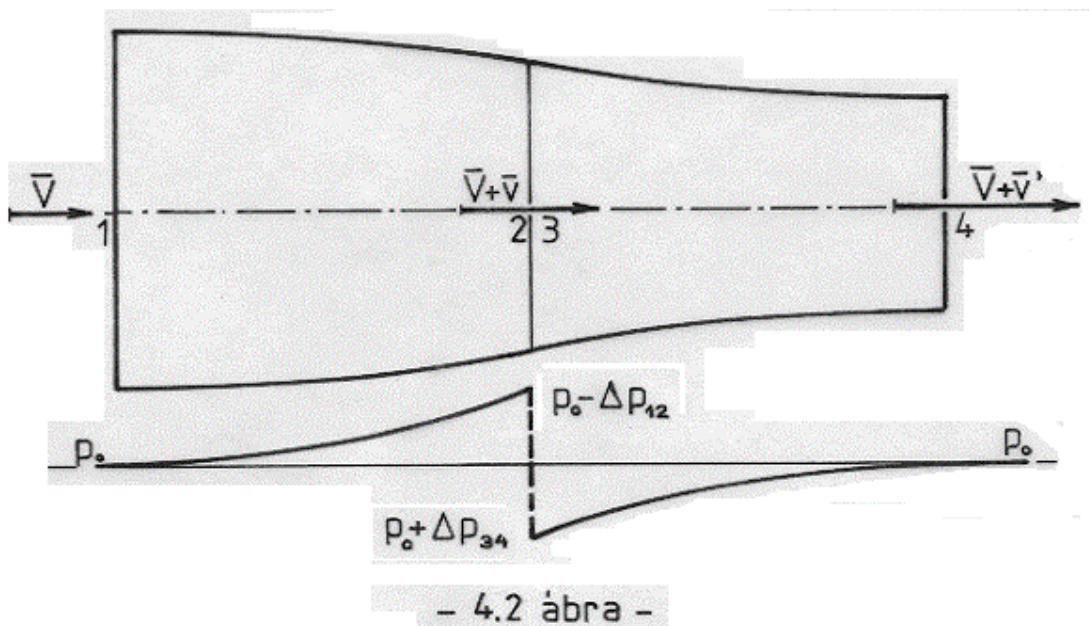
Szerkezeti szempontból a légcsvavar három fő részre osztható (4.1 ábra):

- hajtó tengely;
- légcsvavar agy;
- légcsvavar lapátok.

A légcsvavar lapátok - a véges szárnyakhoz hasonlóan - szárnyprofilokból épülnek fel, a levegőben mozogva rajtuk aerodinamikai erő keletkezik. Ezek szerint a lapátok felett, azaz a légcsvavar sík előtt nyomás csökkenést, a lapátok alatt, azaz a légcsvavarsík után nyomás növekedést találunk.



A 4.2 ábra egy légcsvavar körül kialakuló levegő-sugarat mutat be:



A sugár belépő keresztmetszetét (1-es pont) és kilépő keresztmetszetét (4-es pont) egyaránt úgy választottuk, hogy ott a nyomás már jó közelítéssel a zavartalan (atmoszférikus) nyomással legyen egyenlő. A két felületet szűkülő, hengerpalásthöz hasonló áramcsővel kötjük össze. Ezen a felületen, melynek hosszmeteszete látható a 4.2 ábrán, a nyomás ugyan nem mindenütt állandó, de pl. [1] szerint megmutatható, hogy e felület rész eómentes. Az ily módon definiált felület lesz az egyik olyan, egyszeresen összefüggő, zárt felület, amelyre az impulzus tételt felírjuk; a másik pedig a légcsvavartárcsát szorosan körülvevő, a 2-es és a 3-as pont által meghatározott felület.

A sugárban a nyomás a légcsvár síkját kivéve szigorúan monoton módon csökken. A légcsvár a levegőnek teljesítményt ad át, ez jelenik meg abban, hogy a nyomás a légcsvársíkon keresztül (elméletileg) ugrásszerűen növekszik. A sebesség a sugárban a nyomás változásának megfelelően szigorúan monoton nő, méghozzá ez a növekedés folytonos - hiszen nincs olyan fizikai hatás, ami ugrásszerű sebességnövekedést okozna.

A többi fejezethez hasonlóan itt is állandó sűrűséggel számolunk. Ezért a sebesség folytonos növekedésével a légcsvár sugár keresztmetszete folyamatosan csökken. A sebesség növekedést két ponton vizsgáljuk. A légcsvár síkjában mérhető illetve értelmezhető sebesség növekedést " v "-vel jelöljük és közeli indukált sebességnek nevezzük. A sugár kilépő keresztmetszetében értelmezett sebességet " v' "-vel jelöljük és távoli indukált sebességnek nevezzük.

Az indukált sebességgel kapcsolatban megismételjük a bevezetőbeli megjegyzést: az indukált sebesség és az aerodinamikai erő között ok-okozati kapcsolat van, így hatásvonaluk azonos, értelmük a választott megfigyelési ponttól függően lehet ellentétes vagy azonos is. A 4.2 ábrán például az együttmozgó megfigyelési pont miatt ellentétes értelmet találunk.

4.1 Légcsvár előzetes méretezése

A részletes méretezés előtt célszerű néhány előzetes vizsgálatot elvégezni. Első lépésben tekintsük a 4.2 ábrán vázolt viszonyokat. Írjuk fel a **Bernoulli** egyenletet az (1-2) és a (3-4) pontpárra:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{(V+v)^2}{2} + \frac{p_0 - \Delta p_{12}}{\rho}; \quad \text{és:} \quad \frac{(V+v')^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{(V+v)^2}{2} + \frac{p_0 + \Delta p_{34}}{\rho}.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$\frac{(V+v')^2}{2} - \frac{V^2}{2} = \frac{\Delta p_{34} + \Delta p_{12}}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (4.1)$$

A $\Delta p = \Delta p_{34} + \Delta p_{12}$ jelölés a légcsvár-sík mögötti és a légcsvár-sík előtti (statikus) nyomás különbsége. A fenti egyenletek felírásakor egyébként feltételeztük, hogy az egyes jellemzők a légcsvár-sík minden pontjában állandók. Az előzetes méretezésben a továbbiakban is megtartjuk ezt a feltételt.

Felírhatjuk a mozgásmennyiség-megmaradásra érvényes impulzus tételt, először a 4.2 ábrával kapcsolatban elsőként említett, külső ellenőrző felületre:

$$T = \dot{m} v' = R^2 \pi \rho (V + v) v'.$$

Írjuk fel az impulzus tételt a légcsvár-síkot közvetlenül körülvevő ellenőrző felületre is (itt az időegységre eső mozgásmennyiség változás nulla, csak a nyomásváltozásból kapunk erőt):

$$T = R^2 \pi \Delta p .$$

A fenti két egyenletet 4.1-be beírva - néhány egyszerű átalakítás után - azt kapjuk, hogy:

$$\frac{2 V v' + v'^2}{2} = \frac{T}{R^2 \pi \rho} = (V + v) v' ;$$

innen pedig egyszerű számolással következik, hogy:

$$v' = 2v ; \tag{4.2}$$

Ez a kétszeres indukált sebesség szabályának légcsvarra vonatkozó alakja. Végeredményben a légcsvár vonóereje - a légcsvár geometriai kialakításából *egyedül a légcsvár sugarát (R) véve figyelembe* - a következőképpen írható:

$$T = \dot{m} 2v = R^2 \pi \rho (V + v) 2v ; \tag{4.3}$$

Ebből az összefüggésből - adott repülési sebesség (V) és légcsvár sugár (R) esetén - kiszámítható az indukált sebességhez (v) tartozó vonóerő (T), vagy fordítva.

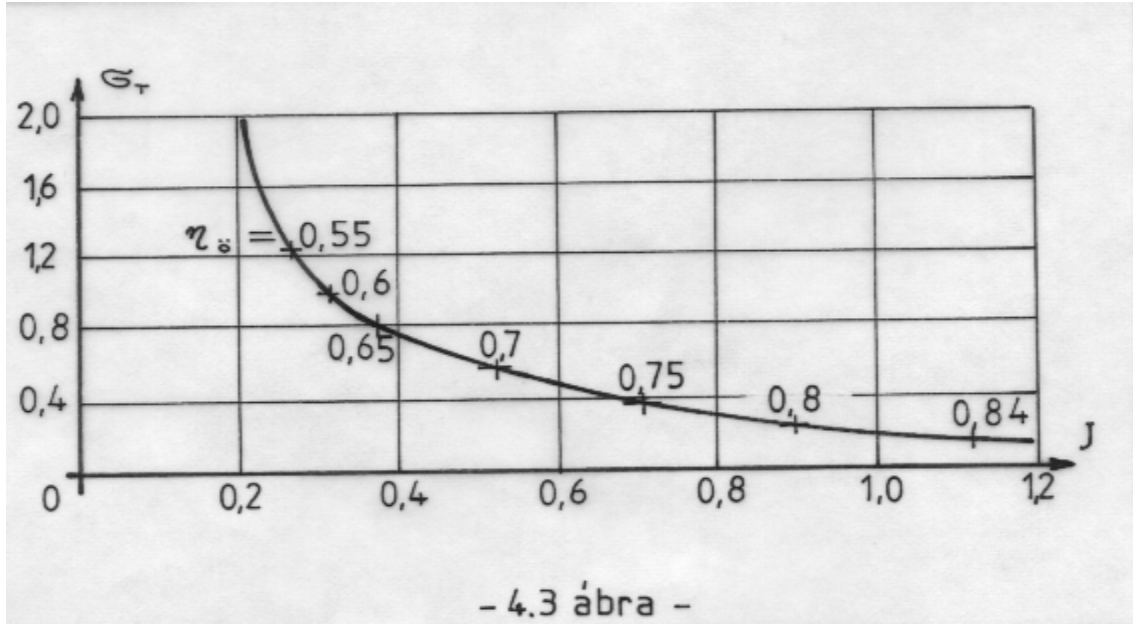
A légcsvár működését alapvetően a propulziós hatásfok határozza meg. A valóságos hatásfok ennél csak rosszabb lehet. A propulziós hatásfok a hasznos teljesítmény és a levegő időegységre eső mozgási-energia növekedésének hányadosa:

$$\eta_p = \frac{TV}{\dot{m} \left[\frac{(V+2v)^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right]} = \frac{1}{1 + \frac{v}{V}} . \tag{4.4}$$

A propulziós hatásfok tehát függ az indukált sebességtől - ezen keresztül a propulziós erőtől - és a repülési sebességtől. Nyilvánvalóan minél jobb propulziós hatásfok értékre törekszünk, hiszen ez a teljes hatásfok felső korlátja. Kis repülési sebességeken tehát szükségszerűen nagy kell legyen a hajtómű átmérője. Erre talán a legszemléletesebb példa a helikopter rotorja. Abban az esetben, ha nagy a repülési sebesség, viszonylag nagy indukált sebességet is el lehet viselni, így kis hajtómű-átmérő is megfelelő lehet. Ennek felelnek meg a sugárhajtású repülőgépek. Természetesen nem tilos, sőt inkább ajánlatos nagy sebéségen is a nagy hajtómű-átmérő. Ha az egyéb problémák megengedik (pl. szuperszónikus belépés lehetséges), akkor alkalmazzák is ezt a megoldást.

4.2 Előzetes méretezés légcsavar-mérések alapján

A légcsavarok elméleti vizsgálata mellett nagyon fontosak a kísérletek is. E tanulmány írásakor a 30-as évekből származó, az előzetes vizsgálatot segítő mérés (Durand és Lesley kísérleti eredményei) állt rendelkezésre. Ez alapján rajzolható fel a 4.3 ábrán látható görbe.



Itt a $\sigma_T = \frac{T}{\frac{\rho V^2 D^2 \pi}{2 \cdot 4}}$ terhelési fokot ábrázoltuk a $J = \frac{V}{n' D}$ előrehaladási fok függvényében, úgy

hogy a mért légcsavar hatásfok maximális legyen! (Az n' a másodpercenkénti fordulatszámot jelenti.)

A 4.3 ábrán alapuló, lehetséges méretezési eljárás menete a következő:

- ismertnek tételezzük fel a szükséges vonóerőt (T), a légcsavar átmérőjét (D), a repülési sebességet (V) és a levegő sűrűségét (ρ).
- (4.3)-ból kiszámítható a tengelyirányú indukált sebesség:

$$v = \frac{-V + \sqrt{V^2 + (4T / R^2 \pi \rho)}}{4};$$

- ebből (4.4) szerint meghatározható a propulziós hatásfok; másrészt kiszámítható a terhelési fok ($\sigma_T = 8 T / V^2 \pi D^2$) és a 4.3 ábra szerint választható a legjobb előrehaladási fok (J) - illetve ebből a másodpercenkénti fordulatszám:

$$n' = \frac{V}{J D} .$$

A görbéről egyébként az összhatásfok is becsülhető, ami - természetesen - kisebb, mint a propulziós hatásfok. Ellenőrzésként megvizsgálandó, hogy a másod-percenkénti fordulatszám értéke nem túl magas-e, nem vezet-e a lapátvégek környezetében összenyomhatósági problémákhoz.

Ha az előrehaladási fok kb. 0.2-nél kisebbre adódna, akkor csak rossz hatásfokú, egyedi légcsvár tervezhető illetve készíthető. (Ilyen pl. a motoros sárkányrepülők esete, ahol $J = 10 / (1.5 * 50) = 0.133$.)

Részletes méretezést előzetes méretezés után célszerű végezni.

4.3 Légcsvár méretezés

A részletes méretezést az impulzus és a lapelem elmélet egyesítéséből kapott összefüggések alapján végezzük el. Látható, hogy ehhez az eljárásához szükségesek a légcsvár aerodinamikai és geometriai adatai is, vagy más oldalról közelítve: ez az eljárás alkalmas a légcsvár konkrét kialakításának figyelembe vételére. A szóban forgó jellemzők:

- profil a sugár mentén (c_e és c_f tényezők az állásszög és - esetleg - a Reynolds szám függvényében);
- húr hossz eloszlás a sugár mentén ($h = h(r)$);
- beállítási szög eloszlás a sugár mentén ($\vartheta = \vartheta(r)$);
- lapátszám (z);
- a légcsvár lapát kezdeti sugara (r_0);
- légcsvár sugár (R).

A következő számításban a tengelyirányú indukált sebesség mellett (v) tekintetbe vesszük a kerületi indukált sebességet is (u - 4.4 ábra); mindkét indukált sebesség összetevő változik a sugár mentén.

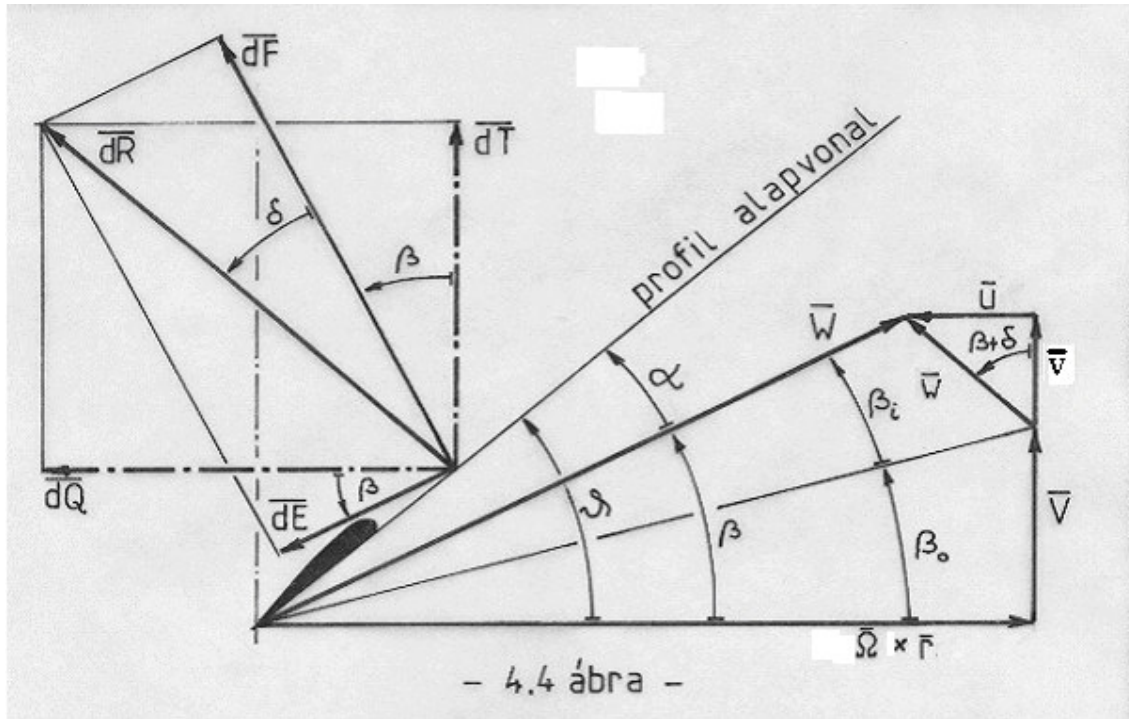
Az impulzus tétel segítségével felírható egy " r " sugarú, " dr " szélességű körgyűrűn keletkező elemi vonóerő:

$$dT = dm \cdot 2v = \rho (V + v) \cdot 2v \cdot 2\pi r \cdot dr \quad ;$$

és a perdület-tétel alapján a forgatáshoz szükséges elemi nyomaték:

$$dM = dm \cdot r \cdot 2u = \rho (V + v) \cdot r \cdot 2u \cdot 2\pi r \cdot dr \quad .$$

A légszár lapátja körül kialakuló sebességeket a 4.4 ábrán láthatjuk:



A profil körül kialakuló sebességek felhasználásával felírható az elemi vonóerő és nyomaték, a profil aerodinamikai jellemzőinek függvényében:

$$dT = z \frac{\rho}{2} W^2 c_T h dr ; \quad \text{és} \quad dM = z \frac{\rho}{2} W^2 c_Q h r dr ;$$

ahol, a 4.4 ábra alapján:

$$c_T = c_f \cos \beta - c_e \sin \beta, \text{ ill. } c_Q = c_f \sin \beta + c_e \cos \beta \quad (4.5)$$

Az elemi vonóerő és a nyomaték kétféle kifejezésének egyenlővé tételével kapjuk a következő összefüggéseket:

$$(V+v)A_v = \sigma W^2 c_T ; \quad \text{és} \quad (4.6)$$

$$(V+v)A_u = \sigma W^2 c_Q . \quad (4.7)$$

A (4.6) illetve (4.7) összefüggésben bevezettük a befedési tényezőt : $\sigma = \frac{z h}{2 \pi r}$; amely megmutatja, hogy az aktuális terület ($2\pi r$) hányad része a lapátok együttes húrhossza (zh).

Az eredő indukált sebesség kiszámítása a következő lépések célja. Induljunk ki a következő (4.4 ábra) összefüggésből:

$$\tan\beta = \frac{V+v}{U-u};$$

és vegyük figyelembe, hogy:

$$v = w \cos(\beta + \delta); \quad \text{és} \quad u = \sin(\beta + \delta). \quad (4.8)$$

Ezzel:

$$w \cos(\beta + \delta) + V = \tan\beta [r\Omega - w \sin(\beta + \delta)]; \quad \text{azaz:}$$

$$w = \frac{r\Omega \tan\beta - V}{\cos(\beta + \delta) + \tan\beta \sin(\beta + \delta)}. \quad (4.9)$$

Másodszorra az eredő megfúvási sebességet (W) számítjuk ki. A 4.4 ábra alapján írható, hogy:

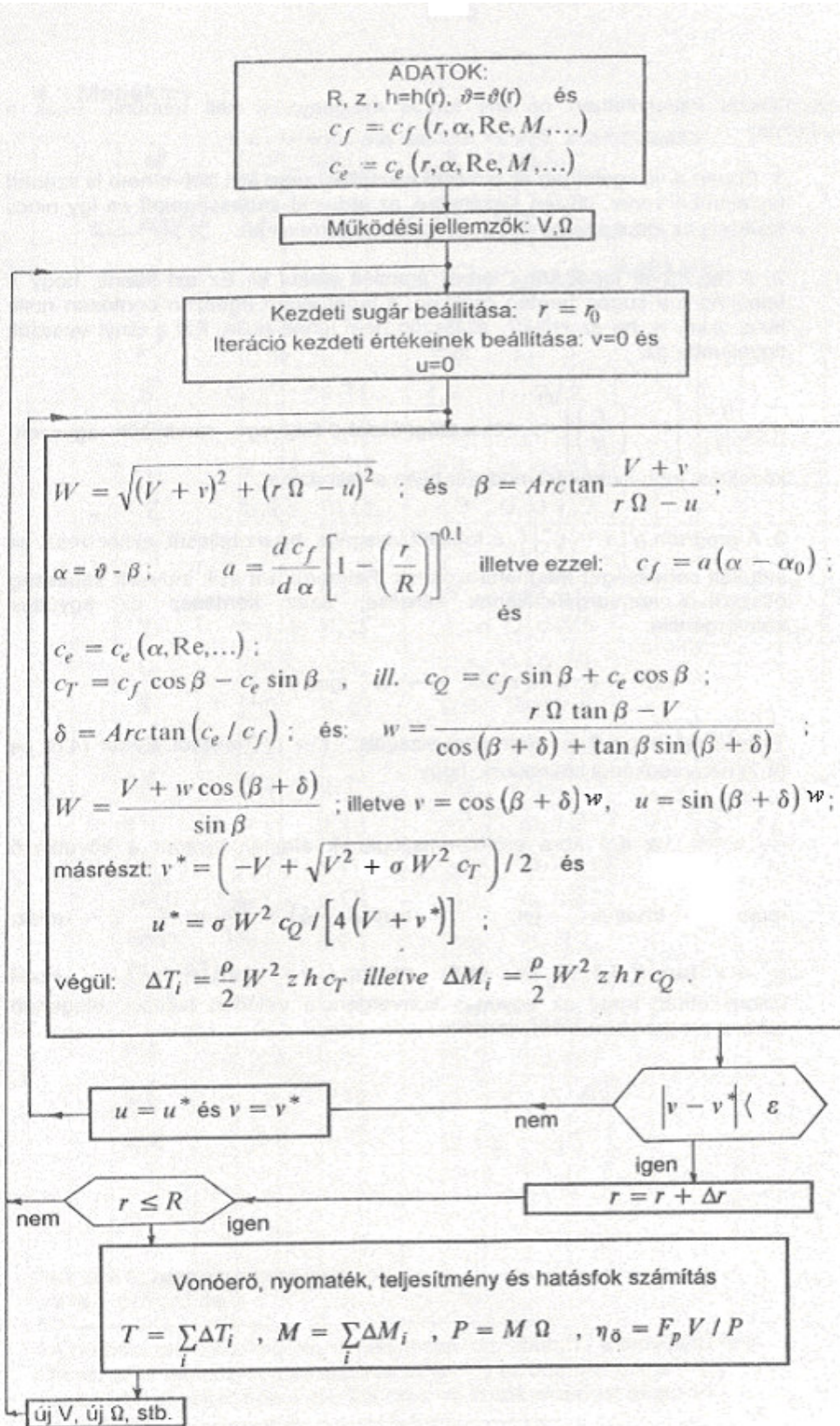
$$\sin\beta = \frac{V+v}{W}; \quad \text{ezzel:} \quad W = \frac{V + w \cos(\beta + \delta)}{\sin\beta}. \quad (4.10)$$

A számításhoz fejezzük ki v -t (4.6)-ból (ezt a programban megkülönböztetésül v^* -gal jelöljük):

$$v^* = \left(-V + \sqrt{V^2 + \sigma W^2 c_T} \right) / 2; \quad \text{és (4.7)-}$$

ből:

$$u^* = \sigma W^2 c_Q / [4(V + v^*)].$$



A számítással kapcsolatban néhány fontos megjegyzést kell tennünk. Ezek a következők:

1. Ebben a vizsgálatban az indukált ellenállást nem kell illetve nem is szabad figyelembe venni, hiszen kiszámítjuk az indukált sebességeket és így nincs szükség az indukált ellenállásnak nevezett korrekcióra.

2. A légcsavár lapát körül térbeli áramlás alakul ki. Ez azt jelenti, hogy a felhajtóerő a sugár mentén csökken, a lapátvégen egészen pontosan nulla lesz, akkor is, ha az effektív állásszög nem lenne nulla. Ezt a tényt vesszük figyelembe az:

$$a = \frac{d c_f}{d \alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right]^{0.1}$$
 összefüggéssel. Ez egy rendkívül egyszerű közelítés, jobb számítási módszer híján alkalmazzuk.

3. A program a $|v - v^*| < \varepsilon$ feltételt vizsgálja, ha ez teljesül, akkor veszi az indukált sebességet meghatározottnak. Felmerül a másik indukált sebesség összetevő konvergenciájának kérdése, azaz kérdéses az együttes konvergencia:

ha $v \rightarrow v^*$, akkor $u \rightarrow u^*$ igaz-e?

Tegyük fel, hogy a program által vizsgált $v \rightarrow v^*$ teljesül. Ekkor (4.6) és (4.7) hányadosából következik, hogy:

$\frac{u^*}{v^*} = \frac{c_Q}{c_T}$. A 4.4 ábra erő-háromszögének alapján viszont a következő relációt

írhatjuk fel: $\tan(\beta + \delta) = \frac{dQ}{dT} = \frac{c_Q}{c_T}$, azaz: $u^* = v^* \tan(\beta + \delta)$; de (4.8)

szerint: $u = v \tan(\beta + \delta)$ - ezzel bizonyítottuk, hogy az együttes konvergencia valóban teljesül, elegendő tehát a programban előírt vizsgálat.

4.1 Melléklet

LÉGCSAVAR-MÉRETEZŐ PROGRAM (Számítógép-program)

Ez a program is TURBO-BASIC nyelven íródott, a vele kapcsolatos megjegyzéseket dőlt betűvel írtuk. A program első része megfelel a fenti blokk-diagrammnak; de van egy második rész is, amelyben geometriai és szilárdsági vizsgálatokat végzünk. Ezt az adott helyen részletezzük majd. Íme a program listája:

```
rem *****
rem          LEGCSAVAR MERETEZO PROGRAM
rem *****
rem          Ezek a legcsavar alapdatai:
n=16 : r0=0.2 : rf=1 : dr=0.05 : pi=3.14159265358 : ro=1.25
dim r(n) , rr(n) , h(n) , teta(n) , em(n) , kqr(n)
dim sz(n) , dt(n) , dq(n) , ki(n) , cf(n)
r(0)=r0
for i=1 to n : r(i)=r(i-1)+dr : next i : cls
input " Kerem a legcsavar atmerojet, D [m] " ;d
input " Kerem a lapatszamoto: " ;zl
input " Kerem az alapbeallitasi szoget: [fok] " ;teta0
input " Kerem a szogsebesset: [rad/sec] " ;omega
input " Kerem a profilt (clark/got) " ;cl$
'-----
'Most pedig a profil koordiatai kovetkeznek:
np=17 : dim xp(np),yf(np),ya(np),xpl(np),yal(np),yfl(np),yac(np),yfc(np)
data 0, 1.25, 2.5, 5, 7.5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 100
for i=1 to np : read xpl(i) : next i
data 5.5, 9, 10.8, 13.3, 14.95, 16.35, 18.25, 19.3, 20, 19.05
data 17.35,15.05, 12.1, 8.6, 4.75, 2.75, 0.65

'Itt a Gottingeni profil jon:
for i=1 to np : read yfl(i) : next i
data 5.5, 3.3, 2.35, 1.25, 0.75, 0.4, 0.15, 0.1, 0, 0, 0, 0
data 0, 0, 0, 0, 0
for i=1 to np : read yal(i) : next i

'Itt a Clark profil kovetkezik
data 3.50, 5.45, 6.50, 7.90, 8.85, 9.60, 10.68, 11.36, 11.70, 11.40
data 10.52, 9.15, 7.35, 5.22, 2.80, 1.49, 0.12
for i=1 to np : read yfc(i) : next i
data 3.50, 1.93, 1.47, 0.93, 0.63, 0.42, 0.15, 0.03, 0, 0, 0, 0
data 0, 0, 0, 0, 0
for i=1 to np : read yac(i) : next i
```

```

'-----
' Ez itt a kezdeti sebesseg es a dinamikai viszkozitas
v=1e-7 : nu=1.4e-5
'-----
' A hurhosszak kovetkeznek, dimenziotlan formaban(!) - a tenyleges hur-
' hosszat az atmerovel valo szorzasa adja - igy az adatok kozé a (h/D)
' szamertekeket kell beirni (persze csak ha masik eloszlast akarunk).
'-----

data 0.048,0.05,0.0523,0.0613,0.069,0.0738,0.0761,0.0752,0.0731,0.0696
data 0.0655,0.061,0.056,0.05,0.045,0.0381,0.01
for i=0 to n : read h(i) : h(i)=h(i)*d : rr(i)=r(i)*d/2 : next i

```

```

'-----
'
' Itt a szazalekos profilvastagsagok kovetkeznek, a tonel nyilvánvalóan
' nagyobb, a lapatveg fele csokkeno. Ez persze a profil megfelelo
' modositasi is megkoveteli.
'-----

```

```

data 0.55,0.5,0.367,0.24,0.173,0.14,0.117,0.107,0.102,0.0962,0.0914,0.0895
data 0.0857,0.085,0.083,0.081,0.08
for i=0 to n : read em(i) : sz(i)=zl*h(i)/(2*pi*rr(i)) : next i

```

```

'-----
'
' Ezek itt a beallitasi szog ertekei, a profil alapvonalatol merve
'-----

```

```

data 34.6,33.5,31.4,28.62,26.26,23.68,21.54,19.74,18.21,16.89,15.74
data 14.74,13.86,12.87,11.59,10.44,8
for i=0 to n : read teta(i) : next i
for i=0 to n : teta(i)=teta(i)+teta0 : next i

```

Az eddigiekben a program egy előre definiált légcsavar geometriai adatait olvasta be. Ezt néhány vonatkozásban könnyen lehet módosítani (pl. átmérő), de ezeknek az adatoknak a felhasználása az itt definiálthoz geometriailag hasonló légcsavart eredményez. Más légcsavar kialakítás esetén ezeket az adatokat módosítani kell! Hasonlóképpen a definiálttól különböző profil alkalmazása esetén annak koordinátái és a megfelelő aerodinamikai tényezők (ezeket a program az "aero" és a "clark" elnevezésű szubrutinban számítja) megadása is szükséges.

Az alapbeállítási szög, amit a program a futás elején kér be, hozzáadódik a programbeli beállítási-szög eloszláshoz. Ha tehát nem kívánjuk a megadott beállítási-szög eloszlást módosítani, akkor ide nullát kell írni.

```

-----
'
'           Kezdodik a szamitas
'
-----
'
ki(0)=1
for i=1 to n step 2 : ki(i)=4 : ki(i+1)=2 : next i
ki(n)=1 : cls
print " Sebesseg      Ero      Teljesitmeny      Hatasfok"
print " [km/h]        [N]        [kW]          [%]"
print
'-----
'           Szamitasi ciklus eleje
'-----
eleje:
vcs=0 : ucs=0
for i=0 to n
cimke:
vsz=v+vcs : vn=omega*rr(i)-ucs : ve=sqr(vn*vn+vsz*vsz)
re=ve*h(i)/nu : beta=atn(vsz/vn) : bet=beta*180/pi : alf=teta(i)-bet
if cl$="got" then call aero(alf,re,em(i),a,alfa0,cx)
if cl$="clark" then call clark(alf,re,em(i),a,alfa0,cx)
szor=exp(0.1*log10(1.0001-r(i))) : a=a*szor : cf=a*(alf-alfa0) : ce=cx
dlt=atn(ce/cf) : sdb=sin(dlt+beta) : cdb=cos(dlt+beta)
sb=sin(beta) : cb=cos(beta) : ct=cf*cb-ce*sb : cq=cf*sb+ce*cb
wi=(omega*rr(i)*sb/cb-v)/(sdb*sb/cb+cdb)
w=(v+wi*cdb)/sb : vi=wi*cdb
vcs=(-v+sqr(v*v+sz(i)*w*w*ct))/2
ucs=sz(i)*w*w*cq/(4*(v+vcs))
if abs(vcs-vi)>1e-4 then : goto cimke
if w>290 then print " Baj lesz az osszenyomhatosaggal!"
ui=wi*sdb : qp=ro*zl*w*w*h(i)/2 : dt(i)=qp*ct : dq(i)=qp*rr(i)*cq
next i
'-----
'           Iteracio vege, integralas kovetkezik
'-----
sum=0 : sul=0
for i=0 to n
sum=sum+dt(i) : sul=sul+dq(i)
next i
ero=sum*dr*d/2 : nyomatek=sul*dr*d/2 : eta=ero*v/(nyomatek*omega)
print using " ###.##^    ";v*3.6;ero;nyomatek*omega/1000;eta*100
v=v+2
if v<30 then goto eleje
print : print : input "Tovabblepes (i/n) ";qew$
if qew$="n" then stop

```

 Szamitasi ciklus vege

Itt kezdődik az új számítási rész, amely azonban már nem tartozik az aerodinamikai vizsgálathoz. Erre a vizsgálatra részben a szilárdsági viszonyok tisztázása, részben a megtervezett légcsavarok elkészítésének megkönnyítése érdekében van szükség.

E két célnak megfelelően először a profilok geometriai adatait veszi sorra a program, majd ezután faanyag feltételezésével centrifugális erőt és ebből származó húzófeszültséget számol.

A második részben kiszámítja az egyes lapátmetszetekben a konkrét profil koordinátákat és ezek alapján felrajzolja a profil-kontúrt illetve megállapítja annak a téglalapnak a méreteit, amibe ez a profil elfér (minx , maxx és miny , maxy). Ez azért fontos, mert így lehet megállapítani annak a fa hasábnak a befoglaló méreteit, amiből a légcsavar kimunkálható. Hasonlóképpen ezen adatok alapján lehet a hasáb oldalaira bejelölni a durva megmunkálás határvonalait is.

 Igenybevetelek szamitasa kovetkezik

```

mg=-0.2 : mag=0
  for ii=1 to n
    if cl$="got" then call profil (em(ii),h(ii),ker)
    if cl$="clark" then call cprofil (em(ii),h(ii),ker)
    screen 11 : window (-0.1,-0.5)-(1.1,0.5)
  for i=1 to np-1 : line (mag+xp(i),mg+yf(i))-(mag+xp(i+1),mg+yf(i+1)) : next i
  for i=1 to np-1 : line (mag+xp(i),mg+ya(i))-(mag+xp(i+1),mg+ya(i+1)) : next i
  mag=mag+0.05 : mg=mg+0.03
    kqr(ii)=ker
  next ii

```

```

print : print "          Lapatmetszet - sorozat "
rofa=800 : ' ez a fa surusege, kg/m^3-ben
cf(n)=0
for i=n-1 to 1 step -1
  if kqr(i)>kqr(i+1) then ter=kqr(i) else ter=kqr(i+1)
  terfogat=ter*(rr(i+1)-rr(i)) : tomeg=terfogat*rofa
  cf(i)=cf(i+1)+tomeg*omega*omega*(3*rr(i+1)+rr(i))/4
next i
input " Tovabb ";qww
cls : screen 0
print "   Metszet          Centrifugalis ero      Huzo feszultseg"
print "   [m]                [N]                  [N/mm^2]"
print
for i=1 to n
  huf=cf(i)/kqr(i)*1e-6
  print using "#####.###^^^"      ";rr(i),cf(i),huf
next i

```

```

-----
'
'          Profilrajzok kovetkeznek
-----
print : print : input " Kovetkezzenek a profilrajzok      ";rq$
if rq$="n" then stop
cls : screen 11
dim xxa(np),xxf(np),yya(np),yyf(np)
for i=0 to n
  if cl$="clark" then call cprofil(em(i),h(i),ker)
  if cl$="got" then call profil(em(i),h(i),ker)
  theta=(-teta(i))*pi/180 : ctt=cos(theta) : stt=sin(theta)
  maxx=-100 : minx=100 : maxy=-100 : miny=100
  for j=1 to np
    xxf(j)=xp(j)*ctt-yf(j)*stt : yyf(j)=xp(j)*stt+yf(j)*ctt
    xxa(j)=xp(j)*ctt-ya(j)*stt : yya(j)=xp(j)*stt+ya(j)*ctt
    if xxf(j)>maxx then maxx=xxf(j)
    if xxf(j)<minx then minx=xxa(j)
    if xxa(j)>maxx then maxx=xxa(j)
    if xxa(j)<minx then minx=xxa(j)
    if yyf(j)>maxy then maxy=yyf(j)
    if yyf(j)<miny then miny=yya(j)
    if yya(j)>maxy then maxy=yya(j)
    if yya(j)<miny then miny=yya(j)
  next j
  window (-0.1,-0.05)-(0.05,0.05) : print "sugar:";rr(i):print
  for j=1 to np-1
    line (-xxa(j),yya(j))-(-xxa(j+1),yya(j+1))
    line (-xxf(j),yyf(j))-(-xxf(j+1),yyf(j+1))
  next j
  minx=1000*minx : maxx=1000*maxx : miny=1000*miny : maxy=1000*maxy
  print minx;" < x < ";maxx;" [mm]"
  print miny;" < y < ";maxy;" [mm]"
  dinamik:
  qrn$=inkey$
  if qrn$="" then goto dinamik
  cls
next i
-----
'
'          Geometria nyomtatas
-----
screen 0
for i=0 to n
  if cl$="clark" then call cprofil(em(i),h(i),ker)
  if cl$="got" then call profil(em(i),h(i),ker)
  rq=1000*rr(i) : hq=1000*h(i)
  print "Sugar = ";;print using "#### " ;rq;;print "[mm] Beallitasi sz”g:";
  print using "###.## " ;teta(i);;print "[fok] Hurhossz: ";
  print using "###.## " ;hq;;print " [mm]"
  print " X          Yfelso          Yalso"

```

```

print "[mm]      [mm]      [mm]" : print
for j=1 to np
  xpq=1000*xp(j) : yfq=1000*yf(j) : yaq=1000*ya(j)
  print using "-###.###" :xpq,yfq,yaq
next j
dino:
qqr$=inkey$
if qqr$="" then goto dino
cls
next i
cls : locate 10,10 : print " V E G E" : end

```

A program az " end " utasítással véget ér ugyan, de eztán következnek a szubrutinok. A légerő-tényező számítására két szubrutin szolgál, mivel a program írásakor egy Göttingeni profil-család (**Gö 622, 623, 624 és 625**) adatait és a **Clark-Y** profil adatait dolgoztuk fel. Ez azt jelenti, hogy a program eleve ezzel a kétféle profillal képes számolni. Adott esetben, ha más profilra lenne szükség, akkor az új profil adatai alapján kell új szubrutinokat írni.

Az első profil-család részletes mérése a rendelkezésünkre állt, ezért a szubrutinban több tényezőt is módunkban volt figyelembe venni. Mivel a légsavár-lapátok a tő felé vastagodnak, ezért a profilok a lapát mentén változnak. Változik, természetesen a Reynolds szám és a nulla felhajtóerő-irány is. A szubrutin bemenő jellemzője a Reynolds-szám (reynolds), a viszonylagos vastagság (em) és az állásszög (alfa); kimenő jellemző a felhajtóerő-tényező iránytangense (a), a nulla felhajtóerő-irány (alfa0) és a légellenállás tényező (cx). A **Clark-Y** profilra sajnos ilyen részletes adatsor nem állt a rendelkezésünkre, így a második, rá vonatkozó szubrutin (clark) csak nagyon egyszerű becsléseket alkalmaz. Szükséges viszont, mert nagyon sok légsavart készítenek ezzel a profillal.

```

'-----
' Aerodinamika a Gottingeni 622, 623, 624 es 625 profil adatai alapján
'-----
sub aero(alfa,reynolds,em,a,alfa0,cx)
  if em>0.2 then em=0.2
  a=(0.06085+0.52825*em-2.225*em*em)
  a=a*(1-(reynolds-4.2e5)/1.357e7*(0.2-em)/0.12)
  alfa0=-((3.54+47.5*(em-0.08))-2.5e-6*(reynolds-4.2e5)*(0.2-em)/0.12)
  cx=3.8/(12+alfa)^2.8+(1.57^(alfa+6))/10000+0.012
  if alfa>9.5 then cx=0.1267+(alfa-9.5)*0.04
  if alfa>1 and alfa<5 then cx=cx+(alfa-1)*(5-alfa)/800
  if alfa>5 and alfa<7 then cx=cx-(alfa-5)*(7-alfa)/800
end sub
'-----
' A CLARK-Y profil aerodinamikai szubrutinja kovetkezik
'-----
sub clark(alfa,reynolds,em,a,alfa0,cx)
  alfa0=5
  a=0.06947
  cx=0.01+0.000332*alfa*alfa
end sub

```

Az aerodinamikai szubrutin az aerodinamikai számításokhoz elegendő. A továbbiak érdekében azonban szükségesek a geometriai adatok is, ezek következnek itt:

```

'-----
'      A Gottingeni profilgeometria kovetkezik
'-----
sub profil(em,h,ter)
shared np,xp(),yf(),ya(),xpl(),yfl(),yal()
for i=1 to np
  yf(i)=(em/0.17)*(yfl(i)/100)
  ya(i)=(em/0.17)*(yal(i)/100) : xp(i)=xpl(i)/100
next i
ter=0
for i=1 to np : yf(i)=h*yf(i) : ya(i)=h*ya(i) : xp(i)=h*xp(i) : next i
for i=1 to np-1
  ter=ter+(xp(i+1)-xp(i))*((yf(i+1)+yf(i))/2+(ya(i+1)+ya(i))/2)
next i
end sub
'-----
'      A CLARK-Y profil geometriaja kovetkezik
'-----
sub cprofil(em,h,ter)
shared np,xp(),yf(),ya(),xpl(),yfc(),yac()
for i=1 to np
  yf(i)=(em/0.17)*(yfc(i)/100)
  ya(i)=(em/0.17)*(yac(i)/100) : xp(i)=xpl(i)/100
next i
ter=0
for i=1 to np : yf(i)=h*yf(i) : ya(i)=h*ya(i) : xp(i)=h*xp(i) : next i
for i=1 to np-1
  ter=ter+(xp(i+1)-xp(i))*((yf(i+1)+yf(i))/2+(ya(i+1)+ya(i))/2)
next i
end sub

```

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Grúber, J. - Blahó, M.: Folyadékok mechanikája
Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
- [2] Lojczjanszkij, L. G.: Folyadékok és gázok mechanikája
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [3] Németh, E.: Hidromechanika
Tankönyvkiadó, Budapest, 1963.
- [4] Robinson, A.-Laurman, J. A.: Wing Theory
Cambridge University Press, 1956.
- [5] Försching, H. W.: Grundlagen der Aeroelastik
Springer Verlag, Berlin, 1974.
- [6] Dwight, H. B.: Tables of Integrals
McMillen, 1961.
- [7] Szidarovszky, F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe
Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1974.
- [8] Nyéki, L.-Nagy, T.: Turbo BASIC
LSI Oktatóközpont, Budapest, 1991.
- [9] Spreiter, J.R.-Sacks, A.H.: The Rolling Up of the Trailing Vortex
Sheet and Its Effect on the Downwash Behind Wings
Journal of Aeronautical Sciences, 1951 Jan. pp. 21-32